

Vorwissenschaftliche Arbeit

MATHEMATISCHE BETRACHTUNG VON
SCHWARZSCHILD-LÖCHERN
BASIEREND AUF DEN
EINSTEIN'SCHEN FELDGLEICHUNGEN

vorgelegt von
Armin Pfeiffer
8.C

betreut von
Mag. Diethard Triebel

Graz, Jänner 2021

Abstract

Die Mathematik, Wissenschaft von Zusammenhang zwischen Logik und Struktur, stellt besonders in den Naturwissenschaften eine wichtige Ausrichtige Rolle dar, der scheinbar keine Grenzen gesetzt ist. In der vorliegenden Arbeit, wird dies wieder auf den Prüfstand gestellt, indem diese für die Beschreibung statischer ladungsneutraler Schwarzer Löcher (s.g. Schwarzschild-Löcher) herangezogen wird. Damit verbunden sind zwei Leitfragen *"Welche Möglichkeiten sind der Mathematik zur Beschreibung von Schwarzschild-Löchern geboten?"* und *"Welche Aussagen lassen für den Bereich innerhalb des Ereignishorizonts eines Schwarzschild-Loches treffen?"*, die im Laufe der Arbeit beantwortet werden sollten.

Hierfür werden die Einstein'schen Feldgleichungen betrachtet. Diese liefern im nächsten Schritt die s.g. Schwarzschild-Lösung, deren Erkenntnisse unabdingbar für die darauffolgende mathematische Beschreibung statischer ladungsneutraler Schwarzer Löcher sind.

V.a. im Hinblick auf die aktuelle Forschung zu Schwarzen Löchern gibt diese Arbeit einen wichtigen Einblick in die Denkweise der modernen Wissenschaft.

Vorwort

Steht noch in Bearbeitung

Inhaltsverzeichnis

Abstract	2
Vorwort	3
Einleitung	8
Vorkenntnisse	9
1 Einstein'sche Feldgleichungen	10
1.1 Grundlagen der Feldgleichungen	10
1.1.1 Kovarianzprinzip	10
1.1.2 Korrespondenzprinzip	12
1.1.3 Prinzip minimaler gravitativer Kopplung	12
1.2 Herleitung der Feldgleichungen	12
1.2.1 Energie-Impuls-Tensor	13
1.2.1.1 Staubwolkenmodell	13
1.2.1.2 Energie-Impuls-Erhaltung	14
1.2.1.3 Überleitung zum Einstein-Tensor	15
1.2.2 Einstein-Tensor	15
1.2.2.1 Bezug zum Energie-Impuls-Tensor	15
1.2.2.2 Bezug zu geometrischen Größen	16
1.3 Formulierung der Feldgleichungen	18
1.3.1 Ko- und Kontravariante Form	18
1.3.2 Kosmologische Konstante	18
1.4 Analyse der Feldgleichungen	18
1.4.1 Divergenzfreiheit der Feldgleichungen	19
1.4.2 Grenzfall der Feldgleichungen	19
1.4.3 Anzahl der Feldgleichungen	19
1.4.4 Lösungsmöglichkeiten der Feldgleichungen	20

1.4.5	Feldgleichungen im Vakuum	20
2	Schwarzschildlösung	21
2.1	Forderungen an die Schwarzschildlösung	21
2.2	Koordinatensysteme in der Schwarzschildraumzeit	23
2.2.1	Kugelkoordinaten	23
2.2.1.1	Kugelkoordinaten in der flachen Raumzeit	24
2.3	Herleitung der Schwarzschildlösung	26
2.3.1	Bestimmung wesentlicher Metrikkomponenten	26
2.3.1.1	Bestimmung von g_{ti} und g_{it}	26
2.3.1.2	Bestimmung von g_{ij} für $i \neq j$	26
2.3.1.3	Bestimmung von $g_{\vartheta\vartheta}$ und $g_{\varphi\varphi}$	27
2.3.2	Bestimmung von $-e^{\nu(r)}$ und $e^{\lambda(r)}$	28
2.3.2.1	Bestimmung von $R_{\mu\nu}$ für $\mu = \nu$	29
2.3.2.2	Relation zwischen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$	31
2.4	Formulierung der Schwarzschildlösung	33
2.5	Analyse der Schwarzschildlösung	34
2.5.1	Exaktheit der Schwarzschildlösung	34
2.5.2	Bezug zur Minkowski-Metrik	34
2.5.3	Vorzeichen der Metrikkomponenten	35
3	Schwarzschild-Löcher	36
3.1	Physikalische Aspekte	36
3.1.1	Singularität	37
3.1.2	Schwarzschildradius	37
3.1.3	Schwarzschildkoordinaten	38
3.1.3.1	Zeitkoordinate	38
3.1.3.2	Radiale Koordinate	39
3.1.4	Gravitative Rot- und Blauverschiebung	41
3.1.5	Radialer Fall in ein Schwarzschild-Loch	43
3.1.5.1	Perspektive des ruhenden Beobachters	43
3.1.5.2	Perspektive des Astronauten	47
3.1.6	Alternative Koordinaten	50
3.1.6.1	Eddington-Finkelstein-Koordinaten	50
3.1.6.2	Kruskal-Szekeres-Koordinaten	55

4 Zusammenfassung	59
Anhang	61
Mathematische Konstanten	61
Physikalische Konstanten	61
Formeln	61
4.0.1 Hyperbelfunktionen	61
4.0.2 Energie-Impuls-Tensor für ein ideales Fluid	62
4.0.3 Eddington-Finkelstein-Metrik im Matrixformalismus	62
4.0.4 Kruskal-Szekeres-Metrik im Matrixformalismus	62
Herleitungen	62
4.0.5 Newtonscher Grenzfall	62
4.0.6 Einsteinkonstante	64
Glossar	66
Eidesstattliche Erklärung	67

Abbildungsverzeichnis

2.1	Räumliche Kugelkoordinaten	23
3.1	Lichtstrahlen in der Schwarzschildraumzeit	52
3.2	Lichtstrahlen in Eddington-Finkelstein-Koordinaten	55
3.3	Kruskal-Szekeres-Diagramm	58

Einleitung

Seit die Mathematiker über die Relativitätstheorie hergefallen sind, verstehe ich sie selbst nicht mehr.

Albert Einstein

Dieses Zitat Albert Einsteins war die Reaktion auf die mathematische Konkretisierung seiner Speziellen Relativitätstheorie (kurz SRT), die von seinem ehemaligen Lehrer, dem deutschen Mathematiker und Physiker Hermann Minkowski vorgenommen wurde. Es zeigt, welches mächtige Werkzeug die Mathematik darstellt, die aus jeder physikalischen Überlegung eine eigene Wissenschaft macht. Nicht zuletzt deshalb stellt sich daher auch die Frage, wo die Grenzen der Mathematik liegen, oder ob es überhaupt welche gibt.

Genau mit dieser Fragestellung setzt sich die hier vorliegende Arbeit auseinander. Hierfür wird versucht, die wohl extremsten Objekte in der Astronomie mathematisch zu beschreiben, die Schwarzen Löcher. Neben den neueren Theorien und Modellen, die für die mathematische und physikalische Darstellung von Schwarzen Löchern eingesetzt werden können, wird in dieser Arbeit auf die altbewährte Allgemeine Relativitätstheorie (kurz ART) zurückgegriffen. Im Gegensatz zur einer etwaigen Stringtheorie ist diese weitaus besser erprobt und zum Verständnis Schwarzer Löcher durchaus intuitiver.

Die Arbeit selbst besteht dabei aus drei wesentlichen Teilen. In ersterem, dem Kapitel *Einstein'sche Feldgleichungen*, wird mit der Beschreibung von Raum und Zeit in Anwesenheit von Massen und Energie ein wichtiger Grundstein gelegt. Durch das Aufstellen weiterer Forderungen ergibt sich eine konkrete mathematische Struktur, die im darauf folgenden Teil, dem Kapitel *Schwarzschild-Lösung*, thematisiert wird. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse lassen sich nun im dritten und letzten Teil, dem Kapitel *Schwarzschild-Löcher*, auf das physikalische Objekt des Schwarzen Loches anwenden. Um sich jedoch auf das Wesentliche zu beschränken, werden bestimmte physikalische Parameter wie elektrische Ladung oder Drehimpuls vernachlässigt.

Vorkenntnisse

Da diese vorwissenschaftliche Arbeit mit hohen mathematischen und physikalischen Anforderungen einher geht, müssen bestimmte Vorkenntnisse als gegeben vorausgesetzt werden, um den Inhalt zur Gänze erfassen zu können:

- **Mathematische Vorkenntnisse:** Neben den im regulären Schulunterricht erworbenen mathematischen Grundvoraussetzungen, sollte man sich zusätzlich mit dem Gebiet der höheren Analysis (Differentialrechnung) beschäftigen haben. Weiters bildet die lineare Algebra, mit den Teilgebieten der Vektor- und Tensorrechnung in den Riemannschen Räumen eine wesentliche Kompetenz, die besonders in den ersten beiden Abschnitten der Arbeit entscheidend wichtig ist.
- **Physikalische Vorkenntnisse:** Um der Thematik von Anfang an folgen zu können, sollte man sich auch mit der Allgemeinen Relativitätstheorie, basierend auf Newtonscher Gravitationslehre und spezieller Relativitätstheorie, auseinandergesetzt haben.

Generell werden gewisse Inhalte (z.B. Newtonscher Grenzfall, Laplace-Gleichung, Poisson-Gleichung, Geodätengleichung) als gekannt vorausgesetzt. Deshalb wird auf deren Herleitung eher spärlich oder erst im Anhang näher eingegangen. Obwohl die quantitativen Formulierungen einen wesentlichen Teil einnehmen, sind diese nur bedingt zum Verständnis der Thematik notwendig. Diesbezüglich lassen sich der Arbeit auch ohne Betrachtung der mathematisch anspruchsvollen Stellen wichtige Informationen entnehmen.

1 Einstein'sche Feldgleichungen

Im Jahre 1915 kam es in der Preußischen Akademie der Wissenschaften zur Veröffentlichung der Allgemeinen Relativitätstheorie, welche die Wechselwirkung zwischen Massen und Raum bzw. Zeit mathematisch beschreibt. Diese enthält u.a. die Einstein'schen Feldgleichungen, in welchen die Gravitation in Zusammenhang mit der Geometrie der Raumzeit gebracht wird. Im Rahmen der mathematischen Beschreibung von Schwarzen Löchern aber auch von anderen kosmischen Objekten stellen diese ein essentielles Fundament dar, das in der modernen Forschung nicht mehr wegzudenken ist.

1.1 Grundlagen der Feldgleichungen

Zum allgemeinen Verständnis der Einstein'schen Feldgleichungen ist es vorteilhaft, eine solide Grundbasis zu legen, auf die man im späteren Verlauf der Arbeit zurückgreifen kann. Diese lässt sich auf drei wesentliche Erkenntnisse der ART (Kovarianzprinzip, Korrespondenzprinzip, Prinzip minimaler gravitativer Kopplung) herunterbrechen.¹

1.1.1 Kovarianzprinzip

In seinen Überlegungen strebt es Einstein an, seine Feldgleichungen so zu formulieren, dass diese unter allgemeinen Koordinatentransformationen invariant, sprich unabhängig vom gewählten Koordinatensystem sind. Um der Bedingung gerecht zu werden, müssen diese in Form von Tensorgleichungen vorliegen.²

¹Vgl. ANDRITSCH, Florian: Mathematische Methoden der Allgemeinen Relativitätstheorie. Graz, Fachbereichsarbeit aus Physik. 2008.

²Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende. Mainz: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2019, S.42.

Generell bleiben die Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie in Abwesenheit von Gravitation erhalten. Somit lassen sich zur Beschreibung der Raumzeit zwei grundlegende Forderungen aufstellen:³

- In lokalen Inertialsystemen reduzieren sich die Gesetze der Allgemeinen Relativitätstheorie auf jene der Speziellen. Die allgemeine Metrik $g_{\mu\nu}$ wird zur Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ und alle Christoffelsymbole $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}$ verschwinden.⁴
- In Abwesenheit von Gravitationsfeldern ersetzt die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ vollständig die allgemeine Metrik $g_{\mu\nu}$ und es gilt $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = 0$.⁵

³Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie. Berlin: Pro Business 2014, S.481.

⁴Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.42.

⁵Vgl. ebda.

1.1.2 Korrespondenzprinzip

Mit den Einstein'schen Feldgleichungen erhält man das relativistische Pendant zur Poisson-Gleichung (partielle Differentialgleichung 2. Ordnung). Diese lautet:

$$\Delta\phi(r) = 4\pi G\rho(r), \quad \phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (1.1)$$

Dabei ist $\phi(r)$ das Gravitationspotential und $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\forall i \in \{x, y, z\}$ der Laplace-Operator.⁶

Das Korrespondenzprinzip besagt nun, dass vorangegangene Theorien mit den neueren vereinbar sind. Überdies soll es einen Grenzfall geben, in welchem sich die beiden ineinander umrechnen lassen.⁷ Somit müssten dem Prinzip nach die Einstein'schen Feldgleichungen im (newtonschen) Grenzfall die Poisson-Gleichung ergeben.⁸

1.1.3 Prinzip minimaler gravitativer Kopplung

Das Prinzip der minimalen gravitativen Kopplung ist ein wichtiges Leitprinzip in der Wissenschaft. Es basiert auf dem Gedanken, dass für eine Problemstellung das einfachste Modell zu bevorzugen ist. In Hinblick auf die Einstein'schen Feldgleichungen besagt es, dass bei deren Formulierung unnötige Zusatzterme (welche das Gravitationsfeld beschreiben) vermieden werden sollten.⁹

1.2 Herleitung der Feldgleichungen

Mithilfe der zuvor genannten Erkenntnisse aus der ART, erhält man ein grobes Bild von den Feldgleichungen. Das Kovarianzprinzip verleiht ihnen ihre Bezugssystemunabhängigkeit, das Korrespondenzprinzip ihre Vereinbarkeit mit

⁶Vgl. ANDRITSCH, Florian: Mathematische Methoden der Allgemeinen Relativitätstheorie. Graz, Fachbereichsarbeit aus Physik. 2008.

⁷Vgl. MÜLLER Andreas: Korrespondenzprinzip. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/astronomie/korrespondenzprinzip/236> [Stand: 19.12.2020].

⁸Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.486.

⁹Vgl. ANDRITSCH, Florian: Mathematische Methoden der Allgemeinen Relativitätstheorie. Graz, Fachbereichsarbeit aus Physik. 2008.

der Poisson-Gleichung und das Prinzip minimaler gravitativer Kopplung ihre Einfachheit. Wie das Kovarianzprinzip von den Feldgleichungen verlangt hat, dürfen diese ausschließlich Tensoren und deren kovariante Ableitungen enthalten. Aus diesem Grunde bedarf es der Definition zweier neuer tensorieller Größen.¹⁰

1.2.1 Energie-Impuls-Tensor

Der Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ ist eine wichtige Größe zur Beschreibung der Energie-Impuls-Verteilung bzw. -Strömung in der Raumzeit. Diese wird von Einstein als Quelle der Raumzeitkrümmung bezeichnet.¹¹

1.2.1.1 Staubwolkenmodell

Betrachte man eine Staubwolke als abgeschlossenes System, bestehend aus nicht miteinander wechselwirkenden Teilchen, so lassen sich die korrespondierenden Komponenten des Energie-Impuls-Tensors $T^{\mu\nu}$ mithilfe folgenden Ansatzes beschreiben:¹²

$$T^{\mu\nu}(x) = \varrho_0(x) u^\mu(x) u^\nu(x) \quad (1.2)$$

Dabei ist $\varrho(r)$ die Masse- bzw. Energiedichte der Staubwolke und $u^\mu(x)$ die Vierergeschwindigkeit, beide in Abhängigkeit von einem beliebigen Koordinatensystem x . Zudem ist der Energie-Impuls-Tensor aufgrund der Vertauschung $\mu \leftrightarrow \nu$ symmetrisch und enthält somit 10 von 16 algebraisch unabhängige Komponenten. Da für die Vierergeschwindigkeit¹³

$$u^\mu(x) = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad \forall \mu \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (1.3)$$

mit

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$$

¹⁰Vgl. ANDRITSCH, Florian: Mathematische Methoden der Allgemeinen Relativitätstheorie. Graz, Fachbereichsarbeit aus Physik. 2008.

¹¹STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.44.

¹²Vgl. ebda, S.45.

¹³Vgl. ebda.

gilt, lassen sich die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors mithilfe des räumlichen Geschwindigkeitsvektors $v^i = \frac{dx^i}{dt}, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ wie folgt definieren:¹⁴

$$\mathbf{T} \mapsto T^{\mu\nu} = \varrho_0 \gamma^2 \begin{pmatrix} (c)^2 & cv^1 & cv^2 & cv^3 \\ cv^1 & (v^1)^2 & v^1 v^2 & v^1 v^3 \\ cv^2 & v^1 v^2 & (v^2)^2 & v^2 v^3 \\ cv^3 & v^1 v^3 & v^2 v^3 & (v^3)^2 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit, v^i der räumliche Geschwindigkeitsvektor, x^μ der Orts-Vierervektor und $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ mit $v = |v^i|$ der Gamma-Faktor aus der SRT.¹⁵

Mit dem Modell der Staubwolke erhält man einen vereinfachten Zugang zur Beschreibung der Energie-Impuls-Verteilung bzw. Strömung in der Raumzeit. Analog wird auch das Modell des idealen Fluids herangezogen. Hierbei muss noch eine auf die Oberfläche senkrecht wirkende Kraft angemerkt werden.

1.2.1.2 Energie-Impuls-Erhaltung

Eine u.a. wichtige Beschaffenheit des Energie-Impuls-Tensors ist die Vereinbarkeit mit dem Energie-Impuls-Erhaltungssatz. Hierfür kann die s.g. Bilanzgleichung herangezogen werden, in welcher die Veränderung mengenartiger Größen (wie der Energie-Impuls-Verteilung/-Strömung) in einer begrenzten Raumeinheit zum Ausdruck gebracht wird:¹⁶

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.5)$$

Dabei ist $\nabla_\mu T^{\mu\nu} := \partial_\mu T^{\mu\nu} + T^{\kappa\nu} \Gamma_{\kappa\mu}^\mu + T^{\mu\kappa} \Gamma_{\kappa\mu}^\nu$ die kovariante Ableitung von $T^{\mu\nu}$ nach μ , wobei $\forall \kappa, \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ gilt.

Physikalisch gesehen kann die Nullbilanz/Divergenzfreiheit in (1.5) als Bestätigung des Energie-Impuls-Erhaltungssatzes gedeutet werden. Es ist jedoch zu beachten, dass die Bilanzgleichung nur Gültigkeit erlangt, wenn für $T^{\mu\nu}$ alle

¹⁴Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.46.

¹⁵Vgl. ebda, S.45f.

¹⁶Wikipedia (2020): Energie-Impuls-Tensor. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Energie-Impuls-Tensor> [Stand:29.2.2021].

miteinander wechselwirkenden Felder eines Systems berücksichtigt werden.¹⁷

1.2.1.3 Überleitung zum Einstein-Tensor

Aufgrund seiner mathematischen Eigenschaften lässt sich der Energie-Impuls-Tensor für jedes Bezugssystem anwenden. Dieser bezieht sich lediglich auf die Quelle, nicht aber auf die daraus resultierende Raumzeitkrümmung. Hierfür wird eine weitere mathematische Größe definiert, welche im nächsten Abschnitt näher beleuchtet wird.

1.2.2 Einstein-Tensor

Der Einstein-Tensor $G^{\mu\nu}$ beschreibt die durch die Energie-Impuls-Verteilung bzw. -Strömung hervorgerufene Raumzeitkrümmung. Dieser besteht aus den ersten und zweiten Ableitungen der Metrik $g^{\mu\nu}$, und ist selbst in den zweiten Ableitungen der Metrik $g^{\mu\nu}$ linear. Weiters vererbt der Energie-Impuls-Tensor seine Eigenschaften auf den Einstein-Tensor, wodurch dieser u.a. symmetrisch und divergenzfrei ist. Man schreibt:¹⁸

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &= G^{\nu\mu} \\ \nabla_{\mu} G^{\mu\nu} &= \nabla_{\nu} G^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

1.2.2.1 Bezug zum Energie-Impuls-Tensor

Da der Einstein-Tensor $G^{\mu\nu}$ die Eigenschaften des Energie-Impuls-Tensors $T^{\mu\nu}$ übernommen hat, kann vermutet werden, dass beide proportional zueinander sind. Daher lässt sich folgender Ansatz wählen:¹⁹

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \tag{1.6}$$

Dabei ist κ eine Proportionalitäts-Konstante (auch Einsteinkonstante genannt). Diese kann unter Anwendung des Newtonschen Grenzfalles und An-

¹⁷Wikipedia (2020): Wikipedia: Einsteinsche Feldgleichungen. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Einsteinsche_Feldgleichungen [Stand:29.2.2021].

¹⁸Vgl. ANDRITSCH, Florian: Mathematische Methoden der Allgemeinen Relativitätstheorie. Graz, Fachbereichsarbeit aus Physik. 2008.

¹⁹Vgl. FREISTETTER, Florian (2016): Ein Symbol für Raum und Zeit. URL: <https://www.spektrum.de/kolumne/was-sind-tensoren-und-vektoren/1411995> [Stand: 19.12.2020].

betrachtet der aus den folgenden Abschnitten stammenden Erkenntnisse mit $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ berechnet werden. Gleichzeitig erhält man mit der Proportionalitätsgleichung (1.6) den ersten Abschnitt der Einstein'schen Feldgleichungen.

1.2.2.2 Bezug zu geometrischen Größen

Im zweiten Abschnitt der Feldgleichungen wird auf den mathematisch-geometrischen Charakter des Einstein-Tensors $G^{\mu\nu}$ näher eingegangen. Für diesen Zweck bedarf es einer weiteren in der Mathematik angewendeten Größe, dem s.g. Ricci-Tensor $R^{\mu\nu}$. Dieser kommt dabei zur Beschreibung gekrümmter mathematischer Räume zum Einsatz. Da der Ricci-Tensor $R^{\mu\nu}$ aus den ersten und zweiten Ableitungen der Metrik $g^{\mu\nu}$ besteht, sowie symmetrisch ist, lässt sich annehmen, dass der Einstein-Tensor $G^{\mu\nu}$ mit diesem gleichgesetzt werden kann. Jedoch ist der Ansatz nicht zur Gänze korrekt, da der Ricci-Tensor $R^{\mu\nu}$ nicht divergenzfrei ist.²⁰ Zur richtigen Beendigung des Gedankens bedarf es eines zusätzlichen mathematischen Satzes, der zweiten Bianchi-Identität. Diese lautet:²¹

$$\nabla_{\alpha} R_{\kappa\lambda\mu\nu} + \nabla_{\nu} R_{\kappa\lambda\alpha\mu} + \nabla_{\mu} R_{\kappa\lambda\nu\alpha} = 0. \quad (1.7)$$

Dabei ist $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ der vollständig kovariante Riemannsche Krümmungstensor, welcher ebenso wie seine Verjüngung, der kovarianten Form des Ricci-Tensors $R_{\mu\nu}$, zur Erfassung gekrümmter mathematischer Räume hinzugezogen wird. Durch die Multiplikation von (1.7) mit $g_{\alpha\beta} g_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu}$ ergibt sich folgender Rechenweg:²²

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} (\nabla_{\alpha} R_{\kappa\lambda\mu\nu} + \nabla_{\nu} R_{\kappa\lambda\alpha\mu} + \nabla_{\mu} R_{\kappa\lambda\nu\alpha}) \\ &= g^{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} \nabla_{\alpha} R_{\kappa\lambda\mu\nu} + g^{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} \nabla_{\nu} R_{\kappa\lambda\alpha\mu} + g^{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} \nabla_{\mu} R_{\kappa\lambda\nu\alpha}. \end{aligned}$$

²⁰Vgl. ANDRITSCH, Florian: Mathematische Methoden der Allgemeinen Relativitätstheorie. Graz, Fachbereichsarbeit aus Physik. 2008.

²¹STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.38.

²²Vgl. ebda.

Wegen $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$ und unter Berücksichtigung der Symmetrie-Eigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors erhält man²³

$$\begin{aligned}
 0 &= \nabla_\alpha (g^{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu}) + \nabla_\nu (g^{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} R_{\kappa\lambda\alpha\mu}) + \nabla_\mu (g^{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} R_{\kappa\lambda\nu\alpha}) \\
 &= \nabla_\alpha (g^{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu}) - \nabla_\nu (g^{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} R_{\kappa\lambda\mu\alpha}) - \nabla_\mu (g^{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} R_{\lambda\kappa\nu\alpha}) \\
 &= \nabla_\alpha (g^{\alpha\beta} g^{\lambda\nu} R_{\lambda\nu}) - \nabla_\nu (g^{\alpha\beta} g^{\lambda\nu} R_{\lambda\alpha}) - \nabla_\mu (g^{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} R_{\kappa\alpha}) \\
 &= \nabla_\alpha R^{\alpha\beta} - \nabla_\nu R^{\nu\beta} - \nabla_\mu R^{\mu\beta},
 \end{aligned}$$

woraufhin sich durch Umbenennung der Indizes bzw. beidseitiger Multiplikation um den Faktor $\frac{1}{2}$ folgender Ausdruck ergibt:²⁴

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (1.8)$$

Dabei ist R mit $R := R^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = R^\mu_\mu$, genannt Ricci-Scalar, die Verjüngung des Ricci-Tensors.²⁵ Aufgrund der Divergenzfreiheit des eingeklammerten Terms in (1.8), kann man den Einstein-Tensor auf folgende Art beschreiben:²⁶

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \quad (1.9)$$

Hiermit hat man den 2. Abschnitt der Einstein'schen Feldgleichungen gefunden, in welchem ein Zusammenhang zwischen Einstein-Tensor $G^{\mu\nu}$ und Ricci-Tensor $R^{\mu\nu}$ hergestellt wird.²⁷

²³STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.38.

²⁴Vgl. ebda, S.39.

²⁵Vgl. ANDRITSCH, Florian: Mathematische Methoden der Allgemeinen Relativitätstheorie. Graz, Fachbereichsarbeit aus Physik. 2008.

²⁶Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.489f.

²⁷Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.38f.

1.3 Formulierung der Feldgleichungen

1.3.1 Ko- und Kontravariante Form

Mithilfe der Ergebnisse aus 1.6 und 1.9 lassen sich die Einstein'schen Feldgleichungen nun vollständig anschreiben:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}.$$

Diese stehen in der kontravarianten Form. Des Weiteren können sie wegen²⁸

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda}G^{\kappa\lambda} = g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda}\frac{8\pi G}{c^4}T^{\kappa\lambda} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

auch in der bekannteren kovarianten Form formuliert werden:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

1.3.2 Kosmologische Konstante

Da Einstein davon ausging, dass das Universum global gleichmäßig gekrümmt ist, sowie sich in einem statischen Zustand befindet, hat er die Feldgleichungen um einen Zusatzterm $\Lambda g_{\mu\nu}$ erweitert. Dabei wird Λ als kosmologische Konstante bezeichnet. Mit den neuen Erkenntnissen aus Hubbles Beobachtungen Ende der 1920er, in welchen er ein expandierendes Universum nachwies, verwarf Einstein die Konstante, und sprach von der „größten Eselei“ die er fabriziert habe. Aus heutiger Sicht jedoch ist die Existenz einer solchen Konstante nicht ausgeschlossen, da sich mit ihr Theorien wie die s.g. Vakuumenergie in der ART erklären lassen.²⁹

1.4 Analyse der Feldgleichungen

Am Ende des ersten Abschnittes angelangt, wird auf weitere wichtige Aspekte der Einstein'schen Feldgleichungen eingegangen.

²⁸Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.490.

²⁹Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.53.

1.4.1 Divergenzfreiheit der Feldgleichungen

Die Einstein'schen Feldgleichungen sind als komplett divergenzfrei zu bezeichnen, geschuldet der Divergenzfreiheit ihrer einzelner Terme.³⁰

1.4.2 Grenzfall der Feldgleichungen

Als relativistische Verallgemeinerung der Poisson- bzw. Laplace-Gleichung (Vakuungleichung) müssen sich die Einstein'schen Feldgleichungen für den Newtonschen Grenzfall in jene umrechnen lassen.

Beweis: Gemäß des Newtonschen Grenzfalls in Herleitungen und Formeln gilt $\frac{\Delta\phi}{c^2} = R_{00}$. Durch Umformung der Gleichung (1.10) erhält man den Ansatz

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right), \quad (1.11)$$

wobei $T := T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$ der s.g. Laue-Skalar ist.³¹ Unter Berücksichtigung des zuvor genannten Grenzfalls resultiert aus der Gleichung (1.11) der Ausdruck³²

$$\Delta\phi = \frac{8\pi G}{c^2} \left(T_{00} - \frac{1}{2} \underbrace{T}_{=g^{00}T_{00}} g_{00} \right) = 8\pi G \frac{\rho}{2} \delta_{00} = 4\pi G \rho,$$

womit man die Poisson-Gleichung erhält. Für die Vakuum-Lösung der Feldgleichungen ergibt sich mit $\Delta\phi = c^2 R_{00} = \frac{8\pi G}{c^2} \left(0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \right) = 0$ die s.g. Laplace-Gleichung.³³ \square

1.4.3 Anzahl der Feldgleichungen

Da sich die Tensoren $G_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ als 4x4-Matrizen darstellen lassen, gibt es insgesamt 16 verschiedene Gleichungen, die sich aufgrund der Symmetrieeigenschaften auf 10 algebraisch unabhängige reduzieren lassen. Da jedoch 4

³⁰Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.490-495.

³¹Wikipedia (2020): Wikipedia: Einsteinsche Feldgleichungen. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Einsteinsche_Feldgleichungen [Stand:29.2.2021].

³²Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.491.

³³Vgl. ebda, S.493.

der 10 Gleichungen für die beliebige Wahl eines Koordinatensystems entfallen, bleiben lediglich 6 funktional unabhängige Gleichungen übrig.³⁴

1.4.4 Lösungsmöglichkeiten der Feldgleichungen

Mathematisch betrachtet kann man die Einstein'schen Feldgleichungen ungeachtet ihrer tensoriellen Eigenschaften auch als nichtlineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung betrachten, welche die Metrik $g_{\mu\nu}$ als Lösung ergeben. Der Nichtlinearität der Feldgleichungen geschuldet, lässt sich jedoch keine exakte Lösung für $g_{\mu\nu}$ bestimmen. Dies kann vermieden werden, indem die Feldgleichungen unter gegebenen Umständen vereinfacht werden (Zeitunabhängigkeit, Isotropie).³⁵

1.4.5 Feldgleichungen im Vakuum

Bei Abwesenheit von Energie bzw. Masse sind die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$ gleich Null. Die daraus resultierenden s.g. Vakuum-Feldgleichungen werden dabei als Spezialfall angesehen. Diese lauten³⁶

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0. \quad (1.12)$$

³⁴Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.54.

³⁵Vgl. ebda, S.54f.

³⁶Vgl. RUHRLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.503f.

2 Schwarzschildlösung

Mit den Einstein'schen Feldgleichungen wurde ein wichtiger Grundstein zur Beschreibung von Raum und Zeit gelegt. Wie im vorherigen Abschnitt erwähnt, besitzen die Feldgleichungen aufgrund ihrer Nichtlinearität keine exakte Lösung für die Metrik $g_{\mu\nu}$. Dies änderte der deutsche Physiker und Astronom Karl Schwarzschild im Jahre 1916, knapp zwei Monate nach Veröffentlichung der Allgemeinen Relativitätstheorie.³⁷ Ihm nämlich gelingt es, eine Lösung zu finden, welche das Gravitationsfeld des Außenraumes einer kugelsymmetrischen, statischen (nicht rotierenden), ladungsneutralen, Massenverteilung beschreibt – Zum Erstaunen Einsteins. Dieser nämlich hätte es nicht für möglich gehalten, dass jemand in solch kurzer Zeit seine Feldgleichungen zu lösen vermag.³⁸

In diesem Kapitel wird mit der Herleitung und Analyse der Schwarzschild'schen Lösung (bzw. häufiger Schwarzschildlösung oder Schwarzschildmetrik genannt) ein wichtiges Fundament für das darauffolgende Kapitel gelegt.³⁹ Mit diesem Aspekt im Hinterkopf ist es angemessen, gewisse Forderungen aus den Erkenntnissen der Einsteinschen Feldgleichungen mitzunehmen.

2.1 Forderungen an die Schwarzschildlösung

Die Schwarzschildmetrik ist aufgrund der in der Einleitung erwähnten Symmetrien an Forderungen geknüpft, welche für die Herleitung derselben von äußerster Bedeutung sind:

³⁷Vgl. ZENZ Geraldine (2016): Soldat, der Schwarze Löcher vorhersah. URL: <https://science.orf.at/v2/stories/2772700/> [Stand: 19.12.2020].

³⁸Vgl. SCHULZ Joachim: Schwarzschildmetrik. URL: <http://www.xn--relativittsprinzip-ttb.info/formeln/schwarzschildmetrik.html> [Stand: 20.2.2021].

³⁹Wikipedia (2020): Wikipedia: Schwarzschild-Metrik. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Schwarzschild-Metrik> [Stand:29.2.2021].

- Da der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ für alle Punkte außerhalb der Kugel gleich Null ist, können zur Vereinfachung die Vakuumfeldgleichungen herangezogen werden. Folgerichtig gilt:⁴⁰

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{2.1}$$

- Die Metrik als sphärische Vakuumlösung muss zudem unabhängig vom gewählten Zeitpunkt sein. Man schreibt:

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0, \quad \forall \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\},$$

wobei $x^0 = ct$ jene Koordinate ist, welche die Zeit beschreibt. Daraus resultiert, dass die Metrik invariant unter der Zeitumkehr sein muss, womit $\mathbf{g}(-t) = \mathbf{g}(t)$ gilt. Dieser Sachverhalt wird in anderen Worten durch das Birkhoff-Theorem wiedergegeben.⁴¹

- Aus der Kugelsymmetrie der Masseverteilung und der sich daraus ergebenden Rotationssymmetrie folgt, dass sich die Metrik $g_{\mu\nu}(P)$ durch Rotation von jedem beliebigen Punkt $P \neq O$ um den Mittelpunkt der Kugel nicht verändert.⁴²
- Mit zunehmender Entfernung vom Zentralkörper nähert sich die Schwarzschild-Metrik der Minkowski-Metrik an. Man schreibt:⁴³

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}, \quad r \rightarrow \infty.$$

⁴⁰Vgl. ANDRITSCH, Florian: Mathematische Methoden der Allgemeinen Relativitätstheorie. Graz, Fachbereichsarbeit aus Physik. 2008.

⁴¹Vgl. ebda.

⁴²Vgl. ebda.

⁴³Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.502f.

2.2 Koordinatensysteme in der Schwarzschildraumzeit

Bevor man sich zur Herleitung der Schwarzschildmetrik begeben kann, sollte die Frage zur Wahl eines geeigneten Koordinatensystems geklärt werden. Dabei ist es vorteilhaft, die zeitlichen sowie räumlichen Symmetrien miteinzubeziehen, die vom jeweiligen Koordinatensystem widergespiegelt werden sollten.⁴⁴

2.2.1 Kugelkoordinaten

Hinsichtlich der bereits gemachten Erkenntnisse ist es sinnvoll, zur Formulierung der Schwarzschildmetrik ein Kugelkoordinatensystem zu verwenden. Betrachte man einen beliebigen Punkt $P \neq O$ vorerst in der euklidischen Geometrie, so lässt sich dieser mithilfe der drei räumlichen Kugelkoordinaten r, ϑ bzw. φ bestimmen. Dabei ist r , auch radiale Koordinate genannt, die Distanz zwischen P und dem Koordinatenursprung. Hingegen handelt es sich bei ϑ und φ wiederum um zwei definierte räumliche Winkel (vgl. Abb.3.3).⁴⁵

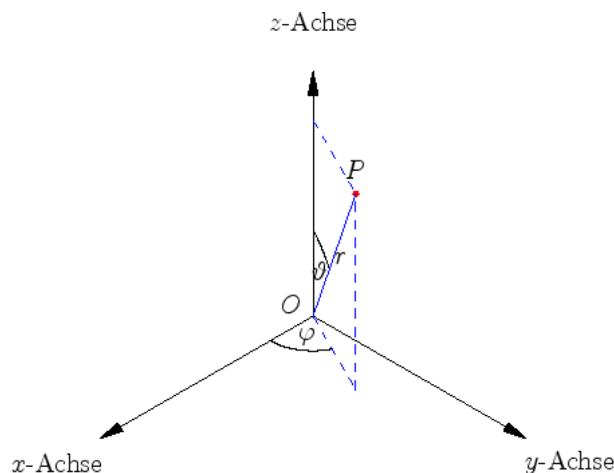


Abbildung 2.1: Räumliche Kugelkoordinaten

Die räumlichen Kugelkoordinaten lassen sich wie folgt in kartesische Koor-

⁴⁴Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.499.

⁴⁵Vgl. ebda, S.415.

dinaten umschreiben:⁴⁶

$$\begin{aligned}x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\z &= r \cos \vartheta.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Die zeitliche Koordinate bleibt hingegen unverändert. Man schreibt:

$$t = t.$$

2.2.1.1 Kugelkoordinaten in der flachen Raumzeit

Im Rahmen der Herleitung der Schwarzschild-Metrik ist es zielführend, zuvor das Kugelkoordinatensystem auf den „einfachsten“ Fall, der flachen Raumzeit, angewendet zu haben. Diese wird für gewöhnlich durch die Minkowski-Metrik in kartesischen Koordinaten beschrieben. Es gilt:⁴⁷

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha, \beta \in \{t, x, y, z\}.$$

Neben dem bekannten Matrix-Formalismus lässt sich die Minkowski-Metrik auch als Linienelement ds^2 anschreiben. Dieses lautet:⁴⁸

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.\tag{2.3}$$

Dabei sind dx^α und dx^β die Koordinatendifferentiale in einem lokalen Inertialsystem.

Um das Minkowski-Linienelement für das Kugelkoordinatensystem anwenden zu können, müssen die kartesischen Koordinatendifferentiale gemäß der

⁴⁶Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.499.

⁴⁷Vgl. ebda, S.353.

⁴⁸Vgl. ebda, S.500.

Transformationsgleichung⁴⁹

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad \forall \alpha, \beta \in \{t, x, y, z\}, \quad \forall \mu, \nu \in \{t, r, \vartheta, \varphi\} \quad (2.4)$$

in Kugelkoordinaten ausgedrückt werden. Schließlich ergibt sich für die kartesischen Koordinatendifferentiale basierend auf (2.2):⁵⁰

$$\begin{aligned} dt &= dt \\ dx &= \sin \vartheta \cos \varphi dr + r \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - r \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi \\ dy &= \sin \vartheta \sin \varphi dr + r \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta - r \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi \\ dz &= \cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

Setzt man nun das Ergebnis in (2.3) ein, so erhält man das Minkowski-Linienelement in Kugelkoordinaten. Dieses lautet:⁵¹

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

Nicht selten kommt es auch in der Form

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

mit $d\Omega^2 \equiv d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2$ vor.

⁴⁹Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.20.

⁵⁰Vgl. ebda.

⁵¹Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.500.

2.3 Herleitung der Schwarzschildlösung

2.3.1 Bestimmung wesentlicher Metrikkomponenten

Um unnötige Rechenarbeit zu ersparen, ist es von Vorteil, basierend auf der Wahl des Koordinatensystems und den bereits erwähnten Forderungen, so viele der 16 Komponenten der Schwarzschild-Metrik $g_{\mu\nu}$ wie möglich eindeutig bestimmen zu können.

2.3.1.1 Bestimmung von g_{ti} und g_{it}

Basierend auf der Annahme, dass die Schwarzschild-Metrik unter der Zeitumkehr invariant ist, lässt sich diese auf folgende zwei Arten in Form eines Linienelements anschreiben:⁵²

$$ds^2 = g_{tt}c^2 dt^2 + 2g_{ti}cdtdx^i + g_{ij}dx^i dx^j$$

und

$$ds^2 = g_{tt}c^2 dt^2 - 2g_{ti}cdtdx^i + g_{ij}dx^i dx^j.$$

Dabei gilt $\forall i, j \in \{r, \vartheta, \varphi\}$. Subtrahiert man beide Gleichungen voneinander, erhält man

$$4g_{ti}cdtdx^i = 0 \Rightarrow g_{ti} = g_{it} = 0, \quad (2.5)$$

womit insgesamt 6 Komponenten der Schwarzschild-Metrik nullwertig sind.⁵³

2.3.1.2 Bestimmung von g_{ij} für $i \neq j$

Wie zuvor in den Forderungen erwähnt, bestehen im Schwarzschildmodell nicht nur Symmetrien in der Zeit, sondern auch im Raum. Daraus folgt, dass die Metrik unter Rotation des Koordinatenursprunges um den Mittelpunkt des Zentralkörpers invariant bleibt. Dieser Tatsache geschuldet lassen sich $d\vartheta$ durch $-d\vartheta$ bzw. $d\varphi$ durch $-d\varphi$ ersetzen, woraufhin alle Terme mit $drd\vartheta$, $drd\varphi$, $d\vartheta d\varphi$

⁵²Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.501.

⁵³Vgl. ebda.

entfallen. Daraus folgt, dass sich⁵⁴

$$g_{ij} = 0, \quad \forall i, j \in \{r, \vartheta, \varphi\} : i \neq j \quad (2.6)$$

ergibt. Unter Einbeziehung der Symmetrieeigenschaften der Metrik sind somit weitere 6 Komponenten der Schwarzschild-Metrik gleich Null.

2.3.1.3 Bestimmung von $g_{\vartheta\vartheta}$ und $g_{\varphi\varphi}$

Unter Voraussetzung der bereits gemachten Erkenntnisse aus (2.5) und (2.6) kann behauptet werden, dass die Schwarzschild-Metrik mit

$$g_{\mu\nu} \begin{cases} = 0, & \forall \mu, \nu \in \{t, r, \vartheta, \varphi\} : \mu \neq \nu \\ \neq 0, & \forall \mu, \nu \in \{t, r, \vartheta, \varphi\} : \mu = \nu \end{cases}$$

in der Matrixschreibweise eine Diagonalmatrix darstellt. Das dazu korrespondierende Linienelement hat die Form⁵⁵

$$ds^2 = g_{tt}c^2 dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad r^2 d\Omega^2 = g_{\vartheta\vartheta}d\vartheta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2$$

wobei $d\Omega$ das zweidimensionale Flächenelement ist. Für dieses gilt nach wie vor die Definition aus dem Abschnitt 2.2.1.1, woraus sich die Formulierung des Schwarzschild-Linienelements

$$ds^2 = g_{tt}c^2 dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

ergibt. Damit sind zwei weitere Komponenten der Schwarzschild-Metrik eindeutig bestimmt. Aufgrund der Tatsache, dass sich die Schwarzschild-Metrik bei größer werdender Entfernung vom Zentralkörper der Minkowski-Metrik annähert, muss folgerichtig

$$\begin{aligned} g_{tt} &\rightarrow -1, & r &\rightarrow \infty \\ g_{rr} &\rightarrow 1, & r &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.7)$$

⁵⁴Vgl. RUHRLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.501.

⁵⁵Vgl. ebda, S.502.

gelten.⁵⁶ Aufgrund dessen werden zur Vereinfachung des Linienelements die Komponenten g_{tt} und g_{rr} durch die Exponentialfunktionen $-e^{\nu(r)}$ bzw. $e^{\lambda(r)}$ ersetzt. Dabei stellen die Exponenten $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ zwei weitere von der räumlichen Koordinate r abhängige Funktionen dar. Angesichts der Symmetrien in Raum und Zeit wird eine Unabhängigkeit in der Zeit und den Winkeln ϑ und φ vorausgesetzt. Daneben muss für die Funktionen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ wegen (2.7) der Zusammenhang⁵⁷

$$\nu(r), \lambda(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

gelten. Somit lässt sich das Schwarzschild-Linienelement wie folgt anschreiben.⁵⁸

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} c^2 dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (2.9)$$

Nun gilt es nur noch die Exponentialfunktionen $-e^{\nu(r)}$ und $e^{\lambda(r)}$ zu bestimmen, deren Herleitung im nächsten Abschnitt behandelt wird.

2.3.2 Bestimmung von $-e^{\nu(r)}$ und $e^{\lambda(r)}$

In diesem Abschnitt werden die Exponentialfunktionen $-e^{\nu(r)}$ und $e^{\lambda(r)}$ ermittelt, womit dann alle 16 Komponenten der Schwarzschild-Metrik bestimmt sind. Dabei sind lediglich jene Diagonaleinträge der Metrik ungleich null, die

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -e^{\nu(r)}, \\ g_{rr} &= e^{\lambda(r)}, \\ g_{\vartheta\vartheta} &= r^2, \\ g_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

⁵⁶Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.502.

⁵⁷Vgl. ebda, S.503.

⁵⁸Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.61.

lauten. Deren kontravariante Einträge werden durch den Kehrwert gebildet. Man schreibt:

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -e^{-\nu(r)}, \\ g^{rr} &= e^{-\lambda(r)}, \\ g^{\vartheta\vartheta} &= r^{-2}, \\ g^{\varphi\varphi} &= r^{-2} \sin^{-2} \vartheta \end{aligned}$$

Des Weiteren bedarf es bei der Herleitung der Exponentialfunktionen $-e^{\nu(r)}$ und $e^{\lambda(r)}$ des Ricci-Tensors $R_{\mu\nu}$. Da es sich bei der Schwarzschildmetrik um eine Vakuumlösung handelt, ergibt dieser gemäß (2.1) Null. Im Rahmen der Herleitung werden jedoch nur die Diagonaleinträge von $R_{\mu\nu}$ benötigt. Man fordert:⁵⁹

$$R_{tt} = R_{rr} = R_{\vartheta\vartheta} = R_{\varphi\varphi} = 0.$$

Da sich der Ricci-Tensor mithilfe der Christoffelsymbole bestimmen lässt, und diese wiederum durch die Metrik hergeleitet werden können, besteht ein direkter Zusammenhang zwischen den beiden tensoriellen Größen. Diesen gilt es nun mathematisch zu beschreiben.⁶⁰

2.3.2.1 Bestimmung von $R_{\mu\nu}$ für $\mu = \nu$

Zur Ermittlung der Diagonaleinträge des Ricci-Tensors müssen zuvor wesentliche Christoffelsymbole bestimmt werden. Deren Berechnung lässt sich wie folgt in einer Formel zusammenfassen:⁶¹

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \frac{g^{\kappa\lambda}}{2} (\partial_{\nu} g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu} g_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}), \quad \forall \kappa, \lambda, \mu, \nu \in \{t, r, \vartheta, \varphi\}.$$

⁵⁹Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.62.

⁶⁰Vgl. ebda.

⁶¹Vgl. ebda, S.29.

Mithilfe der ko- und kontravarianten Komponenten der Schwarzschild-Metrik ergeben sich folgende Christoffelsymbole:⁶²

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda}, \\
 \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2}\lambda', \\
 \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -r e^{-\lambda}, \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r \sin^2 \vartheta e^{-\lambda}, \\
 \Gamma_{rt}^t &= \Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}\nu', \\
 \Gamma_{rt}^r &= \frac{1}{2}\nu', \\
 \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\vartheta}^\varphi = \cot \vartheta, \\
 \Gamma_{\vartheta r}^\vartheta &= \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cos \vartheta.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Alle anderen Christoffelsymbole sind nullwertig. Zur Berechnung der Diagonaleinträge des Ricci-Tensor dient folgende Gleichung⁶³

$$R_{\mu\nu} := \partial_\nu \Gamma_{\mu\kappa}^\kappa - \partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\kappa + \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\kappa}^\kappa, \quad \forall \kappa, \lambda, \mu, \nu \in \{t, r, \vartheta, \varphi\},$$

woraufhin man durch Einsetzen der Christoffelsymbole für die Tensor-Komponenten

$$\begin{aligned}
 R_{tt} &= -e^{\nu-\lambda} \left(\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{\nu'}{r} \right) = 0, \\
 R_{rr} &= \frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{\lambda'}{r} = 0, \\
 R_{\vartheta\vartheta} &= e^{-\lambda} \left[1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda') \right] - 1 = 0, \\
 R_{\varphi\varphi} &= R_{\vartheta\vartheta} \sin^2 \vartheta = 0
 \end{aligned}$$

erhält. Der nächste Schritt zur Bestimmung der Exponentialfunktionen besteht schließlich darin, einen Weg zu finden, um die Beziehung zwischen den Funktionen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ zu beschreiben. Dies wird im nächsten Abschnitt

⁶²Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.63.

⁶³Vgl. ebda, S.36.

behandelt.⁶⁴

2.3.2.2 Relation zwischen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$

Zur Bestimmung der Beziehung zwischen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ betrachte man die Tensor-Komponenten R_{tt} und R_{rr} , welche gemäß der Herleitung folgendes Ergebnis liefern:⁶⁵

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -e^{\nu-\lambda} \left(\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{\nu'}{r} \right) = 0, \\ R_{rr} &= \frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{\lambda'}{r} = 0. \end{aligned}$$

Durch Addition der beiden Gleichung und unter Berücksichtigung, dass $e^{\nu(r)-\lambda(r)}$ für alle $r \in \mathbb{R}$ ungleich Null ist, erhält man⁶⁶

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d(\nu + \lambda)}{dr} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dr}(\nu + \lambda) &= 0 \\ \Rightarrow \nu + \lambda &= a = \text{const.} \end{aligned}$$

Gemäß der Forderung (2.8), nach welcher die Funktionen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ bei zunehmender Entfernung vom Zentralkörper gegen Null gehen, muss demnach $a = 0$ gelten. Daraus folgt, dass⁶⁷

$$\nu(r) = -\lambda(r) \tag{2.11}$$

entspricht. Mithilfe der gewonnenen Erkenntnisse können die Exponentialfunktionen $-e^{\nu(r)}$ und $e^{\lambda(r)}$ nun wie folgt ermittelt werden. Hierfür betrachte man die Komponente des Ricci-Tensors $R_{\vartheta\vartheta}$ und ersetze alle darin vorkommenden

⁶⁴Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.63.

⁶⁵Vgl. ebda, S.64.

⁶⁶Vgl. ebda, S.36.

⁶⁷Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.510f.

Funktionen $\nu(r)$ durch $-\lambda(r)$. Man schreibt:⁶⁸

$$\begin{aligned} R_{\vartheta\vartheta} &= e^{-\lambda} \left[1 + \frac{r}{2} (\nu' - \lambda') \right] - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow 1 &= e^{\nu} (1 + r\nu') \\ \Leftrightarrow 1 &= (re^{\nu})'. \end{aligned}$$

Schließlich erhält man durch Integration den Ausdruck⁶⁹

$$\begin{aligned} re^{\nu} &= r - 2m \\ \Rightarrow e^{\nu} &= 1 - \frac{2m}{r} = -g_{tt}, \end{aligned}$$

wobei m die Integrationskonstante ist. Das Ergebnis weist dabei eine deutliche Ähnlichkeit zu der g_{tt} -Komponente eines schwachen Gravitationsfeldes im Newtonschen Grenzfall auf. Für diese gilt:⁷⁰

$$g_{tt} = - \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right), \quad \phi = -\frac{GM}{r}. \quad (2.12)$$

Folglich lässt sich die Integrationskonstante m durch das Gravitationspotential ersetzen, womit die g_{tt} -Komponente der Schwarzschild-Metrik feststeht. Diese lautet:⁷¹

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right). \quad (2.13)$$

⁶⁸Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.64.

⁶⁹Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.511.

⁷⁰Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.65.

⁷¹Vgl. ebda.

Aufgrund der zuvor beschriebenen Relation zwischen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ in (2.11), lässt sich auch die g_{rr} -Komponente genau bestimmen. Man schreibt:⁷²

$$\begin{aligned} e^\nu &= e^{-\lambda} \\ \Rightarrow g_{rr} &= -g_{tt}^{-1} = -g^{tt} \\ \Rightarrow g_{rr} &= \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Hiermit wurden die letzten fehlenden Komponenten der Schwarzschild-Metrik ermittelt.

2.4 Formulierung der Schwarzschildlösung

Durch die Herleitung der fehlenden Metrikkomponenten g_{tt} und g_{rr} aus (2.13) und (2.14) lässt sich die Schwarzschildmetrik nun vollständig anschreiben. Diese lautet:⁷³

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.15)$$

In der Matrixschreibweise erhält man für die Metrik⁷⁴

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

und analog dazu für die inverse (kontravariante) Form

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^{-2} \vartheta \end{pmatrix}.$$

⁷²Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.511.

⁷³Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.65.

⁷⁴Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.518.

Zur Überprüfung der inversen Metrik kann die Formel $g_{\mu\kappa}g^{\kappa\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$ herangezogen werden.⁷⁵ Dabei ist $\delta_{\mu}^{\nu} := \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}$ die s.g. Einheits- bzw. Identitätsmatrix.⁷⁶

2.5 Analyse der Schwarzschildlösung

Die Schwarzschildlösung stellt einen wichtigen Grundstein in der modernen Forschung dar. Ihre erste experimentelle Bestätigung fand sie während einer Sonnenfinsternis. Hierbei konnte eine scheinbare Positionsabweichung von in der Nähe der Sonne befindlichen Sternen festgestellt werden, was mit den Berechnungen sehr genau übereinstimmte. Daneben konnten Phänomene, wie die Periheldrehung des Merkur oder aber auch die gravitative Rotverschiebung exakt beschrieben werden.⁷⁷

Um das Kapitel zur Schwarzschildlösung sinngemäß abschließen zu können, werden rückblickend die wichtigsten Erkenntnisse zusammengefasst:

2.5.1 Exaktheit der Schwarzschildlösung

Unter den zuvor angenommenen Symmetrien in Raum und Zeit ist die Schwarzschildmetrik eine exakte Lösung und keine Annäherung. Da dieselbe auch den Newtonschen Grenzfall mit abdeckt, ist die Approximationslösung (2.12) in jenem ebenfalls exakt.⁷⁸

2.5.2 Bezug zur Minkowski-Metrik

Wie in den Forderungen festgelegt, nähert sich die Schwarzschildmetrik für $r \rightarrow \infty$ der Minkowski-Metrik an.⁷⁹ Dasselbe gilt, wenn die Zentralmasse M gegen Null geht.

⁷⁵Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.503.

⁷⁶Vgl. ebda, S.179.

⁷⁷Vgl. ANDRITSCH, Florian: Mathematische Methoden der Allgemeinen Relativitätstheorie. Graz, Fachbereichsarbeit aus Physik. 2008.

⁷⁸Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.511f.

⁷⁹Vgl. ebda, S.512.

2.5.3 Vorzeichen der Metrikkomponenten

Betrachte man die Schwarzschildmetrik, so fällt auf, dass deren Diagonaleinträge, für $r > \frac{2GM}{c^2}$, die Vorzeichen $(-, +, +, +)$ besitzen. Gilt jedoch $0 < r < \frac{2GM}{c^2}$, so erhält man mit $(+, -, +, +)$ einen Vorzeichenwechsel. Die physikalische Bedeutung dahinter wird im darauffolgenden Kapitel behandelt.⁸⁰

⁸⁰Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.66f.

3 Schwarzschild-Löcher

Wenige Monate nach Veröffentlichung seiner Lösung erlag Karl Schwarzschild den Folgen einer Autoimmunerkrankung. Jedoch konnte er nicht erahnen, welche weitreichende Wirkung seine Veröffentlichung für die Nachwelt darstellte. Ihm nämlich gelang es nicht nur kosmische Phänomene mathematisch zu erklären, sondern er leistete auch einen wichtigen Beitrag zur Beschreibung der wohl rätselhaftesten und zugleich faszinierendsten kosmischen Phänomene, den Schwarzen Löchern.⁸¹

In diesem Kapitel werden die mathematische Erkenntnisse aus den vorangegangenen Kapiteln verwendet um das Phänomen, des s.g. Schwarzen Loches aus Sicht der Relativitätstheorie zu erforschen. Das passende Fundament dazu wurde mit der Herleitung und Beschreibung der Schwarzschildlösung bereits gelegt.

3.1 Physikalische Aspekte

Schwarze Löcher gehören mitunter zu den extremsten kosmischen Objekten. Dennoch reichen lediglich drei physikalische Größen aus um diese vollständig beschreiben zu können, nämlich Masse, Drehimpuls und elektrische Ladung. Weil es sich jedoch bei der Schwarzschildlösung um eine statische und exakte Lösung handelt, die letztere (Drehimpuls und elektrische Ladung) nicht enthält, müssen diese vernachlässigt werden. Aus diesem Grunde spricht man auch von s.g. statischen ladungsneutralen Schwarzen Löchern (kurz Schwarzschild-Löchern), die mithilfe der Schwarzschildlösung dargestellt werden.⁸² Vor die-

⁸¹Vgl. ZENZ Geraldine (2016): Soldat, der Schwarze Löcher vorhersah. URL: <https://science.orf.at/v2/stories/2772700/> [Stand: 19.12.2020].

⁸²MÜLLER Andreas: Schwarzschild-Lösung. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/astro-nomie/schwarzschild-loesung/431> [Stand: 19.12.2020].

sem Hintergrund sollte deshalb erwähnt werden, dass mit dieser Lösung physikalische Schwarze Löcher nur annäherungsweise beschrieben werden können.

3.1.1 Singularität

Wie aus den einleitenden Worten zu diesem Abschnitt hervorgeht, besitzen Schwarzschild-Löcher eine Gesamtmasse, die um die Forderungen der Schwarzschildlösung nicht zu verletzen, kugelsymmetrisch verteilt sein muss. In der Relativitätstheorie geht man davon aus, dass die gesamte Masse in einer punktförmigen Singularität konzentriert ist - im Widerspruch zur Quantentheorie. Dort wird nämlich behauptet, dass gemäß der Heisenbergschen Unschärferelation jedes Objekt eine Minimalausdehnung besitzt.⁸³

3.1.2 Schwarzschildradius

Wie in Abschnitt 2.5.3 beschrieben, kommt es für $r = r_s = \frac{2GM}{c^2}$ bei den Metrikkomponenten g_{tt} und g_{rr} zu einem Vorzeichenwechsel. Dabei wird r_s als Schwarzschildradius bezeichnet. Daraus lässt sich nun physikalisch interpretieren, dass beim Überqueren des Schwarzschildradius r_s die räumliche Koordinate r zur zeitlichen Koordinate und umgekehrt die zeitliche Koordinate ct zur räumlichen Koordinate wird. Gemäß des Birkhoff-Theorems in Abschnitt 2.1 aber müsse die Schwarzschildmetrik als kugelsymmetrische Vakuumlösung statisch und somit auch zeitunabhängig sein. Hiermit dürfte diese nur für $r > r_s$ Gültigkeit haben.⁸⁴

Des Weiteren ist $r = r_s$ für statische Schwarze Löcher jener Grenzbereich, der als Ereignishorizont bekannt ist. Jedoch sollten Schwarzschildradius und Ereignishorizont nicht miteinander gleichgesetzt werden, da im Falle rotierender Schwarzer Löcher das zuvor Erwähnte nicht mehr zutreffend ist.⁸⁵

U.a. ist es nicht unüblich bei der Formulierung der Schwarzschildmetrik den

⁸³Vgl. MÜLLER Andreas (o.J.): Schwarzschild-Lösung. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/astonomie/schwarzschild-loesung/431> [Stand: 2.20.2021].

⁸⁴Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.67.

⁸⁵Vgl. ebda, S.66.

Term $\frac{2GM}{c^2}$ durch den Schwarzschildradius r_s zu ersetzen. Man schreibt:⁸⁶

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi).$$

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird der Schwarzschildradius noch eine wichtige Rolle einnehmen.

3.1.3 Schwarzschildkoordinaten

Die Schwarzschildlösung beschreibt Punkte in der Raumzeit (auch Ereignisse genannt) mithilfe der Koordinaten t, r, ϑ und φ . Auf den ersten Blick unterscheiden sich diese kaum von den in Abschnitt 2.2.1.1 verwendeten Kugelkoordinaten für die flache Raumzeit.⁸⁷ Betrachtet man jedoch das Schwarzschild-Linienelement in (2.15), so fällt auf, dass im Unterschied zum Minkowski-Linienelement in (2.3) die Koordinatendifferenziale dt^2 und dr^2 Vorfaktoren in Abhängigkeit von r enthalten.

Dieses Wissen kann nun auf die Berechnung von Raum- und Zeitabständen in der gekrümmten Raumzeit von Schwarzschild-Löchern angewendet werden.

3.1.3.1 Zeitkoordinate

In diesem Abschnitt wird die Zeitkoordinate/Koordinatenzeit t genauer behandelt. Vor diesem Hintergrund stelle man sich folgenden Sachverhalt vor:

In der Nähe der Zentralmasse eines Schwarzen Loches befindet sich eine ruhende Uhr mit der radialen Koordinate r . Demnach gilt in Anbetracht von $r > r_s$ für alle räumlichen Koordinatendifferenziale:⁸⁸

$$dr = d\vartheta = d\varphi = 0.$$

Dabei empfängt die lokale Uhr fortlaufend Lichtsignale von einer anderen weit vom Gravitationszentrum entfernten. Der Sekundenzeiger der lokalen Uhr rückt dabei mit jedem erhaltenen Signal um eins weiter. Die im Sekundentakt sendende Uhr wiederum befindet sich in einem annäherungsweise unendlich

⁸⁶Vgl. BRANSON Jim (2012): The Schwarzschild Metric. URL: https://hepweb.ucsd.edu/ph110b/110b_notes/node75.html [Stand: 2.20.2021].

⁸⁷Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.512.

⁸⁸Vgl. ebda, S.513.

großem Abstand zum Massenzentrum des Schwarzschild-Loches, wobei jene die Koordinatenzeit t angibt. Das Zeitintervall in welchem die lokale Uhr die Signale erhält, wird mit $\Delta\tau$ und das Zeitintervall in welchem die andere Uhr die Signale absendet, wird mit Δt bezeichnet. Dabei ist τ die s.g. Eigenzeit der lokalen Uhr. Mithilfe des Zusammenhangs $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ ergibt sich folgender Rechenweg:⁸⁹

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 \\ \Rightarrow \Delta\tau &= \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} dt \\ &= \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \int_{t_A}^{t_B} dt \\ &= \Delta t \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Da die Diskriminante $\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$ für alle $r > r_s$ zwischen eins und null liegt, muss folglich $\Delta\tau < \Delta t$ gelten. Mit anderen Worten vergeht die Zeit bei der lokalen Uhr relativ zur weit entfernten Uhr langsamer. In diesem Zusammenhang spricht man auch von der gravitativen Zeitdilatation.

Aufgrund der Zeitinvarianz der Schwarzschildmetrik lässt sich der Sachverhalt umdrehen. Nun sendet die lokale Uhr die Signale zur weit entfernten. Durch das Lösen der Gleichung nach Δt erhält man folgenden Ausdruck:

$$\Leftrightarrow \Delta t = \Delta\tau \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}^{-1}.$$

Daraus lässt sich physikalisch interpretieren, dass die Zeit der weit entfernten Uhr relativ zur lokalen Uhr schneller vergeht. Dieser Unterschied wird umso markanter, je näher sich die lokale Uhr am Schwarzschildradius befindet.⁹⁰

3.1.3.2 Radiale Koordinate

Nun betrachte man die radiale Koordinate r , welche im euklidischen Raum den radialen Abstand zwischen dem Ursprung O und einem beliebigen Punkt

⁸⁹Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.514.

⁹⁰Vgl. ebda. S.515.

P beschreibt.⁹¹ Nun stellt sich jedoch die Frage, ob diese Aussage auch für die gekrümmte Schwarzschild-Raumzeit eines Schwarzen Loches bei gegebenen Punkten $P(r) : r > r_s$ zutrifft.⁹²

Darauf basierend, definiere man zwei zeitunabhängige Punkte P_1 und P_2 im Raum. Deren radiale Koordinaten lauten r_1 bzw. r_2 , wobei $r_1, r_2 > r_s \wedge r_1 < r_2$ gilt. Des Weiteren sei $\Delta r := r_2 - r_1$ die Differenz zwischen r_1 und r_2 .

Zur Vereinfachung der Thematik wird⁹³

$$dt = d\vartheta = d\varphi = 0 \quad (3.2)$$

gefordert, womit sich das korrespondierende Linienelement zu

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2$$

kürzen lässt. Für die Berechnung des radialen Abstandes zwischen P_1 und P_2 kann wegen der in (3.2) genannten Bedingungen das gekürzte Linienelement ds^2 herangezogen werden. Somit erhält man:⁹⁴

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}^{-1} dr \\ \Rightarrow \Delta s &= \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}^{-1} dr \\ &= \left[r \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} + \frac{r_s}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \right]_{r_1}^{r_2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Für $r_1, r_2 \gg r_s$ lässt sich das Ergebnis (3.3) wegen

$$\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}^{-1} \approx 1 + \frac{r_s}{r}$$

⁹¹Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.415.

⁹²Vgl. ebda, S.513.

⁹³Vgl. ebda.

⁹⁴Wikipedia (2020): Wikipedia: Schwarzschild-Metrik. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Schwarzschild-Metrik> [Stand:29.2.2021].

zu einer Annäherungsgleichung vereinfachen. Diese lautet:

$$\Delta s = r_2 - r_1 + \frac{r_s}{2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right). \quad (3.4)$$

In Anbetracht von (3.3) und (3.4), zeigt sich, dass die Koordinatendifferenz Δr nicht mit dem radialen Abstand Δs übereinstimmt.⁹⁵

3.1.4 Gravitative Rot- und Blauverschiebung

Ein weiterer wichtiger Aspekt im Zusammenhang mit Schwarzen Löchern aber auch anderen gravitativen Objekten ist der Effekt der s.g. gravitativen Rotverschiebung. Dieser kommt dadurch zustande, dass sich die Wellenlänge von Licht vergrößert, wenn dieses sich von einem Gravitationszentrum entfernt. Diese Veränderung in der Wellenlänge nimmt der menschliche Beobachter als eine Verschiebung in den rötlichen Bereich des sichtbaren Spektrums wahr. Genau der gegenteilige Fall trifft ein, wenn sich jenes einem Gravitationsfeld nähert. Hierbei kommt es zu einer Verkleinerung der Wellenlänge, welches vom Menschen als Verschiebung in den bläulichen Bereich empfunden wird. Man spricht von der s.g. gravitativen Blauverschiebung.⁹⁶

In diesem Abschnitt wird der relativistische Effekt der gravitativen Rot- bzw. Blauverschiebung mathematisch genauer behandelt. Hierfür führe man sich folgenden Sachverhalt vor Augen:

Man definiere zwei Punkte P_1 und P_2 mit den radialen Koordinaten r_1 und r_2 im Raum. Wie auch für die beiden Punkte im Abschnitt 3.1.3.2 gilt für diese $r_1, r_2 > r_s$ sowie $r_1 < r_2$. Daneben können den Punkten P_1 und P_2 jeweils den Eigenzeiten τ_1 bzw. τ_2 zugeordnet werden. Nun gehe man davon aus, dass von P_1 eine Lichtwelle zu P_2 ausgesendet wird. Deren Periode wird mit $T_1 := \frac{1}{f_1}$ angegeben, wobei f_1 die Frequenz der Lichtwelle ist. Nun gilt es, die Frequenz f_2 der bei P_2 ankommenden Lichtwelle zu berechnen. Da es sich bei der Periode im Grunde um eine Differenz in der Zeit handelt, lässt das in Abschnitt 3.1.3.1 erworbene Wissen dementsprechend darauf anwenden. Der Übersicht halber

⁹⁵Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.514.

⁹⁶Wikipedia (2020): Wikipedia: Rotverschiebung. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Rotverschiebung> [Stand:29.2.2021].

schreibe man deshalb⁹⁷

$$T_1 = \Delta\tau_1 = \frac{1}{f_1}, \quad T_2 = \Delta\tau_2 = \frac{1}{f_2},$$

worauf man gemäß der der Formel (3.1) zu folgendem Ausdruck kommt:⁹⁸

$$\Delta\tau_1 = \Delta t \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_1}}, \quad \Delta\tau_2 = \Delta t \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_2}}.$$

Durch Umformung der ersten der beiden Gleichungen nach $\Delta\tau$ und durch anschließendes Einsetzen in die zweite Gleichung kommt man schließlich zu folgendem Ergebnis:⁹⁹

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_s}{r_1}}{1 - \frac{r_s}{r_2}}}. \quad (3.5)$$

Löst man nun die Gleichung nach f_2 , so erhält man schlussendlich die Frequenz der bei P_2 angekommenen Lichtwelle. Da die Diskriminante für alle $r_1, r_2 > r_s$ und $r_1 < r_2$ Wert zwischen null und eins besitzt, ist demnach f_2 kleiner als f_1 . Bedenkt man nun, dass die Frequenz einer Welle umgekehrt proportional zu deren Wellenlänge ist, so folgt, dass die Wellenlänge des ausgesendeten Lichtes zugenommen hat. Wie zu erwarten, kommt es zu einer Rotverschiebung.

Dank der Zeitinvarianz der Metrik, kann der Sachverhalt auch umgedreht werden. Nun stelle man sich vor, dass eine Lichtwelle vom Punkt P_2 aus Richtung P_1 gesendet wird. Dies lässt sich mithilfe der Umformung der Gleichung (3.5) nach f_1 bewerkstelligen. Schlussendlich ergibt sich daraus, dass die Wellenlänge abgenommen hat. Das Licht ist blau verschoben.

Abschließend soll noch erwähnt werden, dass die gravitative Rot- bzw. Blauverschiebung eine Konsequenz der gravitativen Zeitdilatation in Abhängigkeit von den radialen Koordinaten r_1 und r_2 ist. Im Extremfall für $r_1 = r_s$ ist die Diskriminante in Formel (3.5) gleich Null.¹⁰⁰ Hiermit stellt der Ereignishorizont eine Barriere für äußere Beobachter dar, die es ihnen unmöglich macht,

⁹⁷Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.519f.

⁹⁸Vgl. ebda, S.520.

⁹⁹Vgl. ebda.

¹⁰⁰Vgl. ebda, S.543.

hinter dieser ausgesendete Lichtsignale zu empfangen.¹⁰¹

3.1.5 Radialer Fall in ein Schwarzschild-Loch

Es ist nicht unbekannt, dass Schwarze Löcher die menschliche Phantasie beflügeln. Einer dieser Gedanken befasst sich mit der Frage, was passieren würde, wenn man sich im freien Fall in ein Schwarzes Loch begäbe. Diese Thematik ist dabei v.a. ein mathematisches Problem, das in diesem Abschnitt genauer behandelt wird.

Hierfür stelle man sich folgenden Sachverhalt vor: Im Gravitationsfeld eines Schwarzschild-Loches befindet sich ein Astronaut, dessen Anfangsposition mit $r = R > r_s$ angegeben ist. Derselbe steht unter Beobachtung einer weit vom Massenzentrum entfernten ruhenden Person, deren Eigenzeit durch die Koordinatenzeit t ausgedrückt werden kann. Währenddessen ist τ der Eigenzeit des Astronauten vorbehalten, der sich im radialen Fall ins Schwarze Loch befindet. Die Aufgabe besteht nun darin sowohl die Perspektive des Astronauten als auch jene des ruhenden Beobachters mathematisch zu beschreiben.¹⁰²

3.1.5.1 Perspektive des ruhenden Beobachters

Im diesem ersten Teil des Abschnittes wird auf die Perspektive des ruhenden Beobachters Bezug genommen. Dieser betrachtet den Astronauten, der zum Zeitpunkt $t = 0$ für $r = R$ die Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau} = 0$ besitzt. Um nun den weiteren zeitlichen Verlauf des Falles mathematisch konstruieren zu können, bedarf es der s.g. Geodätengleichung. Als relativistisches Pendant zur Newtonschen Bewegungsgleichung beschreibt diese Bewegungen in der gekrümmten Raumzeit. Man schreibt:¹⁰³

$$\frac{d^2 x^\kappa}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad \forall \kappa, \mu, \nu \in \{r, t, \vartheta, \varphi\}.$$

Dabei ist s ein beliebiger Parameter, der im Folgenden durch die Eigenzeit τ ersetzt wird. Zur Berechnung des zeitlichen Verlaufes setzte man beim linken

¹⁰¹Vgl. KONITZER Franziska (2016): Die Grenzen eines Schwarzen Lochs. URL: <https://www.weltderphysik.de/gebiet/universum/schwarze-loecher/ereignishorizont/> [Stand: 19.12.2020].

¹⁰²Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.68.

¹⁰³Vgl. ebda, S.68f.

Summanden die Zeitkoordinate t ein, woraufhin man unter Anbetracht der Christoffelsymbole aus (2.10) schließlich erhält:¹⁰⁴

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \Gamma_{rt}^t \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \Gamma_{tr}^t \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} \\
 &= \ddot{t} + \nu' \dot{t} \dot{r} \\
 &= \ddot{t} + \frac{r_s}{r(r-r_s)} \dot{t} \dot{r} \\
 &= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \ddot{t} + \frac{r_s}{r^2} \dot{t} \dot{r} \\
 &= \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} \right] \\
 &\Rightarrow \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} = b = \text{const.} \\
 &\Leftrightarrow \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} b
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dieser Ausdruck wird später von Bedeutung sein. Einen weiteren wichtigen Platz nimmt das Schwarzschild-Linienelement ein, das sich aufgrund der radialen Bewegung des Astronauten zu¹⁰⁵

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 \tag{3.7}$$

verkürzt. Unter Berücksichtigung von $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ ergibt sich folgender Rechenweg:

$$\begin{aligned}
 -c^2 \tau^2 &= - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \\
 \Leftrightarrow c^2 &= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \\
 &= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \dot{t}^2 \\
 \Leftrightarrow c^2 &\left[\left(\frac{r-r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - 1 \right] = \left(\frac{r}{r-r_s}\right) \dot{t}^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

¹⁰⁴Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.69.

¹⁰⁵Vgl. ebda.

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= c^2 \dot{t}^{-2} \left(\frac{r-r_s}{r}\right) \left[\left(\frac{r-r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - 1\right] \\
 &= c^2 \left[\left(\frac{r-r_s}{r}\right)^2 - \dot{t}^{-2} \left(\frac{r-r_s}{r}\right)\right] \\
 \Leftrightarrow \frac{dr}{dt} &= \pm c \left[\left(\frac{r-r_s}{r}\right)^2 - \dot{t}^{-2} \left(\frac{r-r_s}{r}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Aufgrund der Tatsache, dass die radiale Koordinate des Astronauten r mit wachsendem t immer kleiner wird, muss das negative Vorzeichen gewählt werden. Nun betrachte man das Zwischenergebnis in (3.8). Dieses lässt sich mit der Startbedingung $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_{r=R} = 0$ in¹⁰⁶

$$\begin{aligned}
 c^2 &= c^2 \left(\frac{R-r_s}{R}\right) \dot{t}^2 \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{dt}{d\tau}\right)_{r=R} &= \left(\frac{R}{R-r_s}\right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

umschreiben, woraufhin man durch Einsetzen des Ergebnisses in (3.6) folgendes erhält:¹⁰⁷

$$\begin{aligned}
 b &= \left(1 - \frac{r_s}{R}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)_{r=R} \\
 &= \left(1 - \frac{r_s}{R}\right) \left(\frac{R}{R-r_s}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\frac{R-r_s}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} &\stackrel{(3.6)}{=} \left(\frac{r}{r-r_s}\right) \left(\frac{R-r_s}{R}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

¹⁰⁶Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.70.

¹⁰⁷Vgl. ebda.

Schließlich kann (3.10) in (3.9) eingebaut werden. Daraus ergibt sich¹⁰⁸

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{dt} &= -c \left[\left(\frac{r-r_s}{r} \right)^2 - \left(\frac{R}{R-r_s} \right) \left(\frac{r-r_s}{r} \right)^2 \left(\frac{r-r_s}{r} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= -c \left[\frac{(r-r_s)^2}{r^2} - \frac{R(r-r_s)^3}{(R-r_s)r^3} \right] \\
 &= -c \left[\frac{(R-r_s)r(r-r_s)^2 - R(r-r_s)^3}{(R-r_s)r^3} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= -c \frac{(r-r_s)r_s^{\frac{1}{2}}(R-r)^{\frac{1}{2}}}{(R-r_s)^{\frac{1}{2}}r^{\frac{3}{2}}} \\
 \Leftrightarrow dt &= -c^{-1} \frac{(R-r_s)^{\frac{1}{2}}r^{\frac{3}{2}}}{(r-r_s)r_s^{\frac{1}{2}}(R-r)^{\frac{1}{2}}} dr.
 \end{aligned}$$

Durch anschließende Integration kann nun die Zeit berechnet werden, welche der Astronaut vom ruhenden Beobachter aus benötigt, um von der Startposition R zu einer beliebigen Position r zu gelangen. Man schreibt:¹⁰⁹

$$\Delta t = -c^{-1} \left(\frac{R-r_s}{r_s} \right)^{\frac{1}{2}} \int_R^r \frac{r^{\frac{3}{2}}}{(r-r_s)(R-r)^{\frac{1}{2}}} dr.$$

Um nun genauer untersuchen zu können, wie sich der Astronaut in der Nähe des Schwarzschildradius verhält, setzte man $r = r_s + \varepsilon$, wobei $\varepsilon > 0$ ist.

¹⁰⁸Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.70f.

¹⁰⁹Vgl. ebda.

Schließlich erhält man:¹¹⁰

$$\begin{aligned}
 c\Delta t &= -\left(\frac{R-r_s}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}} \int_R^r \frac{(r_s+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon(R-r_s-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} dr \\
 &= -\left(\frac{R-r_s}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{R-r_s}^{r-r_s} \frac{(r_s+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon(R-r_s-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} d\varepsilon \\
 &\approx -\left(\frac{R-r_s}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{R-r_s}^{r-r_s} \frac{(r_s)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon(R-r_s)^{\frac{1}{2}}} d\varepsilon \\
 &= -r_s \int_{R-r_s}^{r-r_s} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \\
 &= -r_s \ln\left(\frac{r-r_s}{R-r_s}\right) \\
 \Leftrightarrow e^{\frac{-c\Delta t}{r_s}} &= \frac{r-r_s}{R-r_s}.
 \end{aligned}$$

Wie man anhand der letzten Gleichung gut erkennen kann, geht mit wachsendem Δt der Ausdruck auf der rechten Seite gegen Null, erreicht diesen Wert jedoch nur asymptotisch. Daraus lässt sich physikalisch interpretieren, dass sich der Astronaut für den ruhenden Beobachter mit der Zeit dem Ereignishorizont annähert, diesen jedoch nie erreicht. Des Weiteren würde dieser mit geringer werdender Distanz zum Schwarzschildradius für den Beobachter immer rötlicher erscheinen. Schlussendlich verschiebt sich sein Spektrum in den Infrarotbereich, womit dieser für Außenstehende nicht mehr wahrnehmbar ist.¹¹¹

3.1.5.2 Perspektive des Astronauten

In diesem Teil des Abschnittes wird zur Perspektive des Astronauten gewechselt. Dieser beschreibt den zeitlichen Verlauf des Falles mit der Eigenzeit τ , welche es nun für das Erreichen des Schwarzschildradius zu ermitteln gilt. Basierend auf der im vorherigen Teil geleisteten Vorarbeit lässt sich die Herleitung dementsprechend abkürzen. Hierfür betrachte man die Gleichung (3.9), die in

¹¹⁰Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.71.

¹¹¹Vgl. ebda.

Kombination mit (3.10) folgendes liefert:¹¹²

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{d\tau} &= \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\
 &= -c \left[\left(\frac{r-r_s}{r} \right)^2 - t^{-2} \left(\frac{r-r_s}{r} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{r-r_s} \right) \left(\frac{R-r_s}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= -c \left(\frac{r_s(R-r)}{Rr} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= -c \left(\frac{r_s}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R-r}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \Leftrightarrow d\tau &= -c^{-1} \left(\frac{R}{r_s} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{R-r} \right)^{\frac{1}{2}} dr.
 \end{aligned}$$

Schließlich erhält man durch Integration der Gleichung folgenden Ausdruck:¹¹³

$$\Delta\tau = -c^{-1} \left(\frac{R}{r_s} \right)^{\frac{1}{2}} \int_R^r \left(\frac{r}{R-r} \right)^{\frac{1}{2}} dr.$$

Um die hier angeführte Gleichung lösen zu können, wird diese einer Reihe an Substitutionen und Änderungen der Integrationsgrenzen unterzogen. Den Beginn macht die Substitution $u = \frac{r}{R}$, wodurch sich

$$\begin{aligned}
 \Delta\tau &= -c^{-1} \left(\frac{R}{r_s} \right)^{\frac{1}{2}} \int_1^{\frac{r}{R}} \left(\frac{u}{1-u} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{dr}{du} \right) du \\
 &= -c^{-1} \left(\frac{R^3}{r_s} \right)^{\frac{1}{2}} \int_1^{\frac{r}{R}} \left(\frac{u}{1-u} \right)^{\frac{1}{2}} du
 \end{aligned}$$

¹¹²Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.72.

¹¹³Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.548.

ergibt.¹¹⁴ Des Weiteren folgt mit $u = v^2$

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= -c^{-1} \left(\frac{R^3}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}} \int_1^{\sqrt{\frac{r}{R}}} \left(\frac{v^2}{1-v^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{du}{dv}\right) dv \\ &= -2c^{-1} \left(\frac{R^3}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}} \int_1^{\sqrt{\frac{r}{R}}} v^2 (1-v^2)^{-\frac{1}{2}} dv,\end{aligned}$$

woraufhin man schlussendlich mit $v = \arccos w$

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= -2c^{-1} \left(\frac{R^3}{r_s}\right) \int_0^{\arccos(\sqrt{\frac{r}{R}})} \frac{\cos^2 w}{\sin w} \left(\frac{dv}{dw}\right) dw \\ &= 2c^{-1} \left(\frac{R^3}{r_s}\right) \int_0^{\arccos(\sqrt{\frac{r}{R}})} \cos^2 v dw\end{aligned}$$

erhält.¹¹⁵ Durch die vielen Rechenschritte ist der Integrand so stark vereinfacht worden, dass dieser nun integriert werden kann. Hiermit ergibt sich folgender Rechenweg:¹¹⁶

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= c^{-1} \left(\frac{R^3}{r_s}\right) \left[\frac{1}{2} \sin 2w + w\right]_0^{\arccos(\sqrt{\frac{r}{R}})} \\ &= c^{-1} \left(\frac{R^3}{r_s}\right) [\cos w \sin w + w]_0^{\arccos(\sqrt{\frac{r}{R}})} \\ &= c^{-1} \left(\frac{R^3}{r_s}\right) \left[\cos w (1 - \cos^2 w)^{\frac{1}{2}} + w\right]_0^{\arccos(\sqrt{\frac{r}{R}})} \\ &= c^{-1} \left(\frac{R^3}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2}} + \arccos\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\right].\end{aligned}\quad (3.11)$$

Setze man $r = r_s$, so erhält man die Eigenzeit die der Astronaut misst, bis er von der Startposition R zum Schwarzschildradius r_s gelangt. Diese ist mit

$$\Delta\tau = c^{-1} (R^2 - Rr_s)^{\frac{1}{2}} + c^{-1} \left(\frac{R^3}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}} \arccos\left(\frac{r_s}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$$

¹¹⁴Vgl. RUHRLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.548f.

¹¹⁵Vgl. ebda, S.549.

¹¹⁶Vgl. ebda, S.549f.

im Gegensatz zur Koordinatenzeit des ruhenden Beobachters endlich. Der zuvor begonnene Gedanke kann mit $r = 0$ weitergeführt werden. Mithilfe der daraus folgenden Formel lässt sich die Eigenzeit berechnen, die bis zum Erreichen der Singularität vergeht. Man schreibt:¹¹⁷

$$\Delta\tau = \frac{\pi}{2c} \left(\frac{R^3}{r_s} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hiermit konnte gezeigt werden, dass der Astronaut aus seiner Perspektive eine endlich lange Zeit bis zum Erreichen der Singularität benötigt, während jener für den ruhenden Beobachter nicht einmal den Ereignishorizont passiert.¹¹⁸

(Hier kommt noch eine Abbildung/Tabelle)

3.1.6 Alternative Koordinaten

Die Schwarzschildkoordinaten stellen ein hilfreiches Werkzeug zur mathematischen Beschreibung von Schwarzschildlöchern dar. Jedoch gehen mit ihr zwei Probleme einher. Zum einen ist die aus den Koordinaten hervorgehende Metrik nur für $r > r_s$ statisch und gemäß des Birkhoff-Theorems auch gültig. Zum anderen stellt der Schwarzschildradius wegen $g_{rr} \notin \mathbb{R}$, $r < r_s$ für den radialen Teil der Metrik eine Koordinatensingularität dar. Aus diesem Grunde werden in diesem Abschnitt zwei alternative Koordinatensysteme vorgestellt die für $r = r_s$ sehr wohl aussagekräftige Ergebnisse liefern können.¹¹⁹

3.1.6.1 Eddington-Finkelstein-Koordinaten

Die nach Sir Arther Eddington und David Finkelstein benannten Koordinaten sollen die Schwachstellen der Schwarzschildmetrik beseitigen. Da diese aus letzterer entspringen, sollte daher zuerst ein Blick auf sie geworfen werden. Hierfür betrachte man die Bahnkurven von sich radial zum Schwarzschildloch bewegendem Lichtstrahlen. Unter Berücksichtigung von $d\vartheta = d\varphi = 0$ sowie

¹¹⁷Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.550.

¹¹⁸Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.73.

¹¹⁹Vgl. ebda, S.75.

deren Nullgeodäte $ds^2 = 0$ gilt für das Schwarzschild-Linienelement:¹²⁰

$$\begin{aligned} 0 &= - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 \\ \Rightarrow 0 &= - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2. \end{aligned}$$

Dabei ist $\dot{t} = \frac{dt}{ds}$ bzw. $\dot{r} = \frac{dr}{ds}$. Unter Einbindung des Zusammenhangs (3.6) folgt:¹²¹

$$\begin{aligned} 0 &= - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 b^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-2} + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \\ 0 &= - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} c^2 b^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \\ \Leftrightarrow \dot{r} &= c^2 b^2 \\ \Leftrightarrow \dot{r} &= \pm cb \\ &\stackrel{(3.6)}{=} \pm c \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} \\ \Leftrightarrow \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} = \pm c \left(1 - \frac{r_s}{r}\right). \end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich durch das Lösen nach ct sowie durch anschließendes Integrieren¹²²

$$\begin{aligned} ct &= \pm \int \frac{r}{r - r_s} dr \\ &= \pm (r + r_s \ln |r - r_s|) + \text{const.} \end{aligned}$$

Dabei gibt das Vorzeichen die Richtung der Lichtstrahlen an, nämlich ob diese ausgehend (+) oder einfallend (-) sind.

¹²⁰Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.75.

¹²¹Vgl. ebda, S.75f.

¹²²Vgl. ebda, S.76.

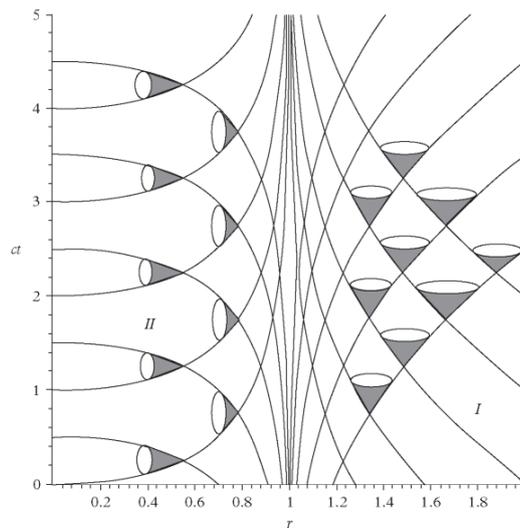


Abbildung 3.1: Lichtstrahlen in der Schwarzschildraumzeit

Es zeigt sich, dass die radiale Koordinate r der ausgehenden Lichtstrahlen für $r > r_s$ mit steigendem ct zunimmt. Betrachte man jedoch ausgehende Lichtstrahlen für $r > r_s$, so wächst der Radius mit kleiner werdendem ct . Dieses Prinzip lässt sich auf einfallende Strahlen genau umgekehrt anwenden.

Irrelevant in welche Richtung sich die Lichtstrahlen bewegen, sie werden für alle Startpositionen $r \neq r_s$ den Schwarzschildradius niemals erreichen. Dagegen machen sich die Eddington-Finkelstein-Koordinaten ein anderes Konzept zunutze. In jenem nämlich werden die einfallenden Lichtstrahlen als Geraden dargestellt, womit das Problem der Koordinatensingularität endgültig gelöst wird. Mit diesem Gedanken im Hinterkopf definiere man die Eddington-Finkelstein-Koordinaten. Diese lauten:¹²³

$$\bar{t} := t \pm \frac{r_s}{c} \ln \left| \frac{r - r_s}{r_s} \right|, \quad \bar{r} := r, \quad \bar{\vartheta} := \vartheta, \quad \bar{\varphi} := \varphi.$$

Schließlich erhält man durch Einsetzen der gegebenen Werte in die Gleichung (2.4)

$$d\bar{t} = dt \mp c^{-1} \frac{r_s}{r - r_s} dr \Leftrightarrow dt = \bar{t} \pm c^{-1} \frac{r_s}{r - r_s} dr,$$

wobei letzteres in das Schwarzschild-Linienelement integriert zu folgendem Re-

¹²³Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.76f.

chenweg führt:¹²⁴

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \left(d\bar{t} \pm c^{-1} \frac{r_s}{r - r_s} dr\right)^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\
 &= - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \left(d\bar{t}^2 \pm 2c^{-1} \frac{r_s}{r - r_s} dr d\bar{t} + c^{-2} \left(\frac{r_s}{r - r_s}\right)^2 dr^2\right) \\
 &\quad + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\
 &= - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 d\bar{t}^2 - \frac{r_s^2 - r^2}{r(r - r_s)} dr^2 \pm \frac{2r_s}{r} cdrd\bar{t} + r^2 d\Omega^2 \\
 &= - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 d\bar{t}^2 + \frac{r_s + r}{r} dr^2 \pm \frac{2r_s}{r} cdrd\bar{t} + r^2 d\Omega^2 \\
 \Rightarrow ds^2 &= - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 d\bar{t}^2 + \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr^2 \pm \frac{2r_s}{r} cdrd\bar{t} + r^2 d\Omega^2.
 \end{aligned}$$

Mit diesem Endresultat erhält man das Eddington-Finkelstein-Linienelement. Abhängig von der Vorzeichenwahl im dritten Summanden beschreibt es entweder ein Schwarzes (+) oder dessen Gegenteil, ein Weißes Loch (-). Da jedoch das Hauptaugenmerk auf Schwarzen Löchern liegt, gilt:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 d\bar{t}^2 + \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr^2 + \frac{2r_s}{r} cdrd\bar{t} + r^2 d\Omega^2.$$

Das hier errechnete Linienelement lässt sich nun auf den anfangs erwähnten Lichtstrahlen anwenden. Da für diesen $d\vartheta = d\varphi = 0$ und $ds^2 = 0$ gilt, schreibt man¹²⁵

$$\begin{aligned}
 0 &= - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 d\bar{t}^2 + \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr^2 + \frac{2r_s}{r} cdrd\bar{t} \\
 &= - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 d\bar{t}^2 + \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr^2 + \frac{2r_s}{r} cdrd\bar{t} \\
 &= - \frac{r - r_s}{r} + \frac{r + r_s}{r} \left(c^{-1} \frac{dr}{d\bar{t}}\right)^2 + \frac{2r_s}{r} \left(c^{-1} \frac{dr}{d\bar{t}}\right) \\
 &= \frac{r - r_s}{r + r_s} - \left(c^{-1} \frac{dr}{d\bar{t}}\right)^2 - \frac{2r_s}{r + r_s} \left(c^{-1} \frac{dr}{d\bar{t}}\right),
 \end{aligned}$$

¹²⁴Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.77.

¹²⁵Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.78.

woraufhin durch Anwendung der kleinen Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$\begin{aligned}
 c^{-1} \frac{dr}{d\bar{t}} &= -\frac{r_s}{r+r_s} \pm \left[\frac{r_s^2}{(r+r_s)^2} + \frac{r-r_s}{r+r_s} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= -\frac{r_s}{r+r_s} \pm \left[\frac{r_s^2}{(r+r_s)^2} + \frac{r^2-r_s^2}{(r+r_s)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= -\frac{r_s}{r+r_s} \pm \frac{r}{r+r_s} \\
 \Leftrightarrow c d\bar{t} &= \int \left(-\frac{r_s}{r+r_s} \pm \frac{r}{r+r_s} \right)^{-1} dr \\
 &= \begin{cases} 2r_s \ln(|r-r_s|) + r + \text{const.} \\ -r + \text{const.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

folgt.¹²⁶ Schließlich erhält man zwei Ergebnisse. Während das obere der beiden die Bahnkurve der auslaufenden Lichtstrahlen beschreibt, steht das untere für die geradlinig einfallenden Lichtstrahlen (vgl. Abb. 3.2). Diese können dabei den Ereignishorizont überqueren. Anders jedoch verhält es sich mit den ausgehenden Lichtstrahlen, die für $r < r_s$ diesen nicht einmal erreichen. Im Falle eines Weißen Loches käme es bei den Ergebnissen je zu einem Vorzeichenwechsel. Hierbei beschreiben die geradlinigen Bahnkurven die auslaufenden Lichtstrahlen, während sich einfallende Lichtstrahlen für $r > r_s$ dem Ereignishorizont asymptotisch annähern. Letztlich konnte mithilfe der Eddington-Finkelstein-Metrik auch bewiesen werden, dass die Koordinatensingularität für $r = r_s$ keine echte Singularität im physikalischen Sinne ist.¹²⁷

¹²⁶Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.78.

¹²⁷Vgl. ebda, S.78f.

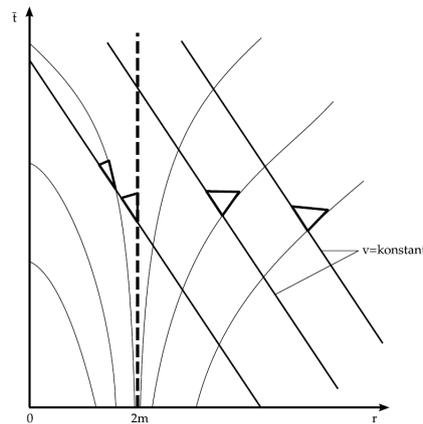


Abbildung 3.2: Lichtstrahlen in Eddington-Finkelstein-Koordinaten

3.1.6.2 Kruskal-Szekeres-Koordinaten

Eine weitere Alternative zu den Schwarzschildkoordinaten stellen die nach Martin Kruskal und George Szekeres benannten Kruskal-Szekeres-Koordinaten dar. Anders als die zuvor genannten Koordinatensysteme beinhalten diese die weitaus größte Menge an aussagekräftigen Informationen über die Schwarzschildraumzeit. Aus diesem Grunde werden sie auch als maximale analytische Erweiterung der Schwarzschild-Lösung bezeichnet.¹²⁸

Zur Darstellung der Schwarzschildmetrik in Kruskal-Szekeres-Koordinaten führe man die zwei Koordinaten T und X ein. Es gilt:

$$T := \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh \left(\frac{ct}{2r_s} \right),$$

$$X := \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh \left(\frac{ct}{2r_s} \right).$$

Die daraus korrespondierende Koordinatendifferenziale lauten¹²⁹

$$dT = \alpha \cosh \left(\frac{ct}{2r_s} \right) dr + \beta c \sinh \left(\frac{ct}{2r_s} \right) dt,$$

$$dX = \alpha \sinh \left(\frac{ct}{2r_s} \right) dr + \beta c \cosh \left(\frac{ct}{2r_s} \right) dt$$

¹²⁸Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.79.

¹²⁹Vgl. ebda, S.82.

mit

$$\alpha^2 = \frac{r^2}{4r_s^3(r-r_s)} e^{\frac{r}{r_s}}, \quad \beta^2 = \frac{r-r_s}{4r_s^3} e^{\frac{r}{r_s}}.$$

Nun gilt es die Schwarzschildkoordinaten dt und dr durch die neu definierten Koordinatendifferenziale dT und dX zu ersetzen. Vor diesem Hintergrund schreibe man:¹³⁰

$$\begin{aligned} dT^2 - dX^2 &= \left[\alpha \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dr + \beta c \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dt \right]^2 \\ &\quad - \left[\alpha \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dr + \beta c \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dt \right]^2 \\ &= \alpha^2 \cosh^2\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dr^2 + 2\alpha\beta \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dr c dt \\ &\quad + \beta^2 \sinh^2\left(\frac{ct}{2r_s}\right) c^2 dt^2 - \alpha^2 \sinh^2\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dr^2 \\ &\quad - 2\alpha\beta \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dr c dt - \beta^2 \cosh^2\left(\frac{ct}{2r_s}\right) c^2 dt^2 \\ &= \alpha^2 \left[\cosh^2\left(\frac{ct}{2r_s}\right) - \sinh^2\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \right] dr^2 \\ &\quad - \beta^2 c^2 \left[\cosh^2\left(\frac{ct}{2r_s}\right) - \sinh^2\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \right] \\ &= \left(\alpha^2 dr^2 - \beta^2 c^2 dt^2 \right) \left[\cosh^2\left(\frac{ct}{2r_s}\right) - \sinh^2\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \right]. \end{aligned}$$

Wegen $(\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R})$ ist der Term in der eckigen Klammer gleich eins,¹³¹ womit

$$\begin{aligned} dT^2 - dX^2 &= \alpha^2 dr^2 - \beta^2 c^2 dt^2 \\ \Leftrightarrow \frac{4r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} (-dT^2 + dX^2) &= \frac{4r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} \left(\frac{r-r_s}{4r_s^3} e^{\frac{r}{r_s}} \right) c^2 dr^2 \\ &\quad - \frac{4r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} \left(\frac{r^2}{4r_s^3(r-r_s)} e^{\frac{r}{r_s}} \right) dr^2 \\ &= - \left(\frac{r}{r-r_s} \right) dr^2 + \left(\frac{r-r_s}{r} \right) c^2 dt^2 \end{aligned}$$

¹³⁰Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.82.

¹³¹Vgl. MÜLLER Johannes: Musterlösung zu Blatt 12, Aufgabe 7. URL: http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~schotten/MIA/Muster/12_7.pdf [Stand: 19.12.2020].

folgt. Schließlich erhält man durch Substitution des Endresultats in die Schwarzschildlösung mit¹³²

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} \left(-dT^2 + dX^2 \right) + r^2 d\Omega^2$$

das s.g. Kruskal-Szekeres-Linienelement. Dabei fällt auf, dass die Metrik keinen einzigen gemischten Term enthält, welches wiederum ein Indiz für die zuvor angesprochene Zeitinvarianz ist. Daneben existiert wie bei den Eddington-Finkelstein-Koordinaten für $r = r_s$ keine Koordinatensingularität.¹³³

Das eigentliche Potential der Kruskal-Szekeres-Koordinaten liegt aber in deren graphischen Darstellung, dem s.g. Kruskal-Szekeres-Diagramm.¹³⁴ Dieses nämlich beschreibt den Zusammenhang zwischen T bzw. X und t bzw. r , wobei die beiden Winkel ϑ und φ zu vernachlässigen sind. Außerdem ist zu beachten, dass die beiden Koordinaten T und X für $0 < r < r_s$ keinen Sinn ergeben, weshalb diese mit

$$T := \left(1 - \frac{r}{r_s} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh \left(\frac{ct}{2r_s} \right),$$

$$X := \left(1 - \frac{r}{r_s} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh \left(\frac{ct}{2r_s} \right).$$

neu definiert werden müssen.¹³⁵

Durch Anwendung der neuen Koordinaten erhält man folgende Gleichungen:

$$T^2 - X^2 = \left(1 - \frac{r}{r_s} \right) e^{\frac{r}{r_s}}$$

$$\frac{X}{T} = \tanh \left(\frac{t}{2r_s} \right).$$

Diese wiederum beschreiben für konstante r - und t -Werte bestimmte Kurven, die in einem gegebenen (T, X) -Koordinatensystem einzeichnet das Kruskal-Szekeres-Diagramm liefern.

¹³²Vgl. ebda.

¹³³Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.82f.

¹³⁴Vgl. ebda, S.83.

¹³⁵Vgl. PARZYGNAT, Arthur J.(2014): Kruskel-Szekeres coordinates and Penrose diagrams. URL: https://arthur-parzygnat.com/wp-content/uploads/2014/12/Kruskel_Szekeres_Penrose.pdf [Stand: 2.20.2021].

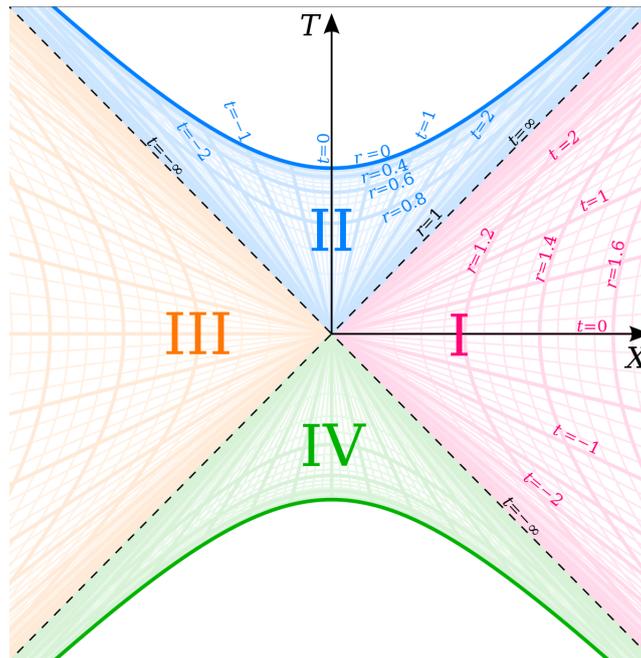


Abbildung 3.3: Kruskal-Szekeres-Diagramm

Dabei wird dieses wie abgebildet in die vier Regionen I, II, III und IV eingeteilt, die von den Winkelhalbierenden ($r = r_s, t = \pm\infty$) begrenzt werden. Betrachte man nun einen Lichtstrahl der von der Region I startet. Diese lässt sich als das dem Menschen vertraute Universum interpretieren. Der Lichtstrahl bewegt sich nun radial in ein Schwarzschild-Loch, wobei dessen Weltlinie parallel zur Geraden ($r = r_s, t = -\infty$) verläuft. Nach Überqueren des Schwarzschild-Radius r_s befindet sich der Lichtstrahl in der Region II, der den Innenraum des Schwarzschild-Loches repräsentiert, kann aber nicht in die Region III oder IV gelangen. Einmal in der Region II angekommen, bewegt sich der Lichtstrahl unweigerlich zur Zukunftssingularität $r = 0$. Anders als bei der Region II hat die Region I keinen Einfluss auf die Region IV. Diese nämlich beschreibt den Innenraum eines Weißes Loches, in den nicht einmal Licht eindringen kann. Dagegen ist die Region III vollkommen von unserem Universum getrennt. Egal was in dieser passieren man, es wird keinen Einfluss auf die Region I haben. Aus diesem Grunde wird die Region III auch als Paralleluniversum betitelt.¹³⁶

¹³⁶Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.565f.

4 Zusammenfassung

Wie aus den gewonnenen Erkenntnissen hervorgeht, bietet die Mathematik ein enormes Repertoire an Werkzeugen und Hilfsmitteln, hat jedoch aber auch ihre Grenzen. Dies hat sich v.a. bei der Schwarzschild-Metrik gezeigt, mithilfe derer sich die gravitative Zeitdilatation, Längenkontraktion, Rot- bzw. Blauverschiebung und der freie Fall in ein Schwarzschild-Loch verhältnismäßig leicht beschreiben lassen. Dies ändert sich jedoch für die zu betrachtende Raumzeit innerhalb des Ereignishorizonts, die hier nicht mehr statisch ist und die Schwarzschild-Metrik ansonsten gegen das Birkhoff-Theorem verstoßen würde. Dennoch konnten mit der Eddington-Finkelstein- sowie Kruskal-Szekeres-Metrik Alternativen gefunden werden, die in ihrer Aussagekraft (v.a. letztere) die Schwarzschild-Metrik noch übertreffen.

Doch egal wie gut sich die Allgemeine Relativitätstheorie mit diversen anderen Theorien, wie der Newtonschen Gravitationslehre vereinbaren lässt, sie ist und bleibt eine Theorie. Es mag gut möglich sein, dass in naher Zukunft eine andere Theorie entwickelt wird, die weitaus umfassendere Lösungsansätze bietet, ja, die sogar die Quantentheorie berücksichtigt.

Womöglich wird es dem Menschen zu keinem Zeitpunkt möglich sein, alle seine Fragen mithilfe einer auf der Mathematik basierenden Theorie zu beantworten. Dies ist dann Aufgabe der Philosophie.

Literaturverzeichnis

Anhang

Mathematische Konstanten

Name	Symbol	Wert
Kreiszahl	π	3,14159...
Eulersche Zahl	e	2,71828...
Quadratwurzel aus 2	$\sqrt{2}$	1,41421...
Quadratwurzel aus 3	$\sqrt{3}$	1,73205...

Physikalsiche Konstanten

Name	Symbol	Wert (SI)
Vakuumlichtgeschwindigkeit	c	299.792.458km/s
Gravitationskonstante	G	$6,672 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

Formeln

4.0.1 Hyperbelfunktionen

Sinus Hyperbolicus: $\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$

Cosinus Hyperbolicus: $\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$

Tangens Hyperbolicus: $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$

4.0.2 Energie-Impuls-Tensor für ein ideales Fluid

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} &= (\rho_0 + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \\
 &= (\rho_0 + p) \rho_0 \gamma^2 \begin{pmatrix} (c)^2 & cv^1 & cv^2 & cv^3 \\ cv^1 & (v^1)^2 & v^1 v^2 & v^1 v^3 \\ cv^2 & v^1 v^2 & (v^2)^2 & v^2 v^3 \\ cv^3 & v^1 v^3 & v^2 v^3 & (v^3)^2 \end{pmatrix} + p g^{\mu\nu}.^{137}
 \end{aligned}$$

4.0.3 Eddington-Finkelstein-Metrik im Matrixformalismus

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) & \frac{r_s}{r} & 0 & 0 \\ \frac{r_s}{r} & 1 + \frac{r_s}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad \forall \mu, \nu \in \{\bar{t}, r, \vartheta, \varphi\}$$

4.0.4 Kruskal-Szekeres-Metrik im Matrixformalismus

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{4r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad \forall \mu, \nu \in \{T, X, \vartheta, \varphi\}$$

Herleitungen

4.0.5 Newtonscher Grenzfall

Für kleine statische Gravitationsfelder gilt:¹³⁸

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, & |h_{\mu\nu}| &\ll 1 \\
 g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, & |h^{\mu\nu}| &\ll 1.
 \end{aligned}$$

¹³⁷Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.376.

¹³⁸Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.48.

Zudem ergibt sich¹³⁹

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\kappa \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \approx -\Gamma_{00}^\kappa \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = -\Gamma_{00}^\kappa \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2.$$

Dabei ist $\forall \mu, \nu, \kappa, \lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$. Durch Umschreiben der Christoffelsymbole erhält man

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^\kappa &= \frac{g^{\kappa\lambda}}{2} (\partial_0 g_{0\lambda} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \approx -\frac{\eta^{\kappa\nu}}{2} \partial_\nu g_{00} = -\frac{\eta^{\kappa\lambda}}{2} \partial_\lambda \eta_{00} \\ \Rightarrow \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} &\approx \frac{c^2}{2} \partial_i h_{00} \Leftrightarrow \frac{d^2 x^i}{d\tau} = -\frac{c^2}{2} \partial_i h_{00}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

woraufhin mit der Newtonschen Bewegungsgleichung¹⁴⁰

$$\begin{aligned} -\nabla\phi &= \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \nabla h_{00} \Leftrightarrow h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} \\ \Rightarrow g_{00} &= 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \end{aligned}$$

folgt.

¹³⁹Vgl. RUHLÄNDER, Michael: Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, S.484.

¹⁴⁰Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.49.

4.0.6 Einsteinkonstante

Für die kovariante Form des Ricci-Tensors gilt:¹⁴¹

$$\begin{aligned}
 R_{\lambda\nu} &= g^{\kappa\mu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} \\
 &= (\eta^{\kappa\mu} - h^{\kappa\mu}) R_{\kappa\lambda\mu\nu} \\
 &= (\eta^{\kappa\mu} - h^{\kappa\mu}) \left[\frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\nu g_{\kappa\mu} + \partial_\kappa \partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\kappa \partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu}) \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{g_{\rho\sigma} (\Gamma_{\kappa\mu}^\rho \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma + \Gamma_{\kappa\nu}^\rho \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma)}_{(*)} \right] \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} (\eta^{\kappa\mu} - h^{\kappa\mu}) (\partial_\lambda \partial_\nu g_{\kappa\mu} + \partial_\kappa \partial_\nu h_{\lambda\mu} + \partial_\kappa \partial_\nu h_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda\mu} h_{\kappa\nu}) \\
 &= \frac{1}{2} \eta^{\kappa\mu} (\partial_\lambda \partial_\nu h_{\kappa\mu} + \partial_\kappa \partial_\nu h_{\lambda\mu} + \partial_\kappa \partial_\nu h_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda\mu} h_{\kappa\nu})
 \end{aligned}$$

Dabei entfallen in (*) aufgrund der linearen Annäherung alle Terme zweiter oder höherer Ordnung. Für die R_{00} -Komponente des Ricci-Tensors folgt unter Anbetracht der Zeitunabhängigkeit des Gravitationsfeldes:¹⁴²

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \frac{1}{2} \eta^{\kappa\mu} \partial_\kappa \partial_\mu h_{00} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\partial_i \partial_i h_{00} - \underbrace{\partial_0 \partial_0 h_{00}}_{=0} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \Delta h_{00} \\
 &= \frac{1}{2} \Delta \frac{2\phi}{c^2} = \frac{\Delta\phi}{c^2}.
 \end{aligned}$$

Dabei gilt $\Delta := \frac{\partial^2 i}{\partial i^2}, \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Die R_{00} -Komponente kann auch durch Umformung der kovarianten Form der Einstein'schen Feldgleichungen beschrieben werden (wobei κ die zu berechnende Einstein-Konstante ist). Man er-

¹⁴¹Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.51.

¹⁴²Vgl. ebda, S.52.

hält:¹⁴³

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} \underbrace{T}_{=g^{00}T_{00}} \right) \\
\Leftrightarrow -\frac{\Delta\phi}{c^2} &= \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} \delta_0^0 T_{00} \right) \\
&= \kappa \frac{1}{2} T_{00} = \kappa \frac{\rho_0 c^2}{2} \\
\Leftrightarrow \kappa &= \frac{\Delta\phi}{c^2} \left(\frac{2}{\rho_0 c^2} \right) \\
&\stackrel{\text{Poisson}}{=} \frac{2 \cdot 4\pi \rho_0 G}{\rho_0 c^4} \\
&= \frac{8\pi G}{c^4}.
\end{aligned}$$

¹⁴³Vgl. STILLERT, Alexandra: Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher, Eine Einführung für Lehramtsstudierende, S.53.

Glossar

Asymptote Kurve, die sich dem Graphen einer Funktion unendlich annähert.

Geodäte Weltlinie von kräftefrei bewegenden Teilchen. Lokal kürzeste Verbindungslinie zwischen zweier benachbarter Punkte.

Invarianz Unveränderlichkeit einer Größe unter Veränderung mathematischer bzw. physikalischer Bedingungen.

Kontravariante Komponenten Tensor-Komponenten, die sich entgegen der Koordinatentransformation transformieren.

Linielement Quadrat eines infinitesimalen Abstandes in der Raumzeit, das sich aus der Metrik ergibt.

Kovariante Komponenten Tensor-Komponenten, die sich mit der Koordinatentransformation transformieren.

Matrix Rechteckige Anordnung von Elementen. Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten enthält insgesamt $m \cdot n$ Elemente.

Metrik-Tensor Mathematische Größe, welche die Geometrie des Raumes in einem Koordinatensystem beschreibt.

Raumzeit Darstellung der drei Raum- und der einen Zeitdimension als 4-dimensionale mathematische Struktur.

Substitution Mathematisches Verfahren, bei dem ein Term durch einen anderen ersetzt wird.

Tensor Ein Tensor n -ten Ranges in m -Dimensionen ist eine mathematische Größe mit n Indizes und m^n Komponenten, dem gewisse Transformationseigenschaften inne wohnen.

Weißes Loch Hypothetisches astronomisches Objekt, welches das Gegenteil eines Schwarzen Loches ist. Äußeren Beobachtern ist es unmöglich den Ereignishorizont zu überqueren.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Abschlussarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben. Sowohl inhaltlich als auch wörtlich entnommene Inhalte wurden als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in dieser oder vergleichbarer Form noch keinem anderem Prüfungsgremium vorgelegen.

Datum: _____ Unterschrift: _____